DS 03 - Numérique

- Faites attention au soin, à la présentation, à l'indentation...
- Vous êtes vivements encouragés à réutiliser les questions précédentes.
- Vous pouvez utiliser toutes les fonctions de python (`min, max, abs`) et du module `math` (`sqrt, factorial`...) sauf quand c'est le but de la question...

1 Représentation des nombres

EXERCICE 1 — *Sur n bits, combien de valeurs différentes peut-on représenter ?*

- *Un constructeur automobile souhaite enregistrer, pour chaque voiture, sa plaque d'immatriculation (2 lettres, 3 chiffres, 2 lettres) ainsi que son année de construction (entre 1900 et 2100, il n'est pas très prévoyant). Combien d'octets sont nécessaires par voiture pour stocker cette information ? Justifiez (plusieurs réponses possibles).*

2 Equations différentielles

EXERCICE 2 — *Rappeler la formule du schéma d'Euler explicite.*

- *Expliquer comment, pour résoudre une équation différentielle d'ordre supérieur, on se ramène à une équation différentielle d'ordre 1 ("vectorialisation").*

Dans la suite, on supposera qu'on dispose d'une fonction `euler(F, y0, temps)` où `temps` est une liste $[t_0, t_1, ..., t_{n-1}]$

EXERCICE 3 *Lorsqu'on veut étudier une épidémie, un modèle simple est le modèle SIR : On répartit la population en 3 sous-groupes et on considère 3 fonctions associées : $S(t)$ (personnes saines), $I(t)$ (personnes infectées) et $R(t)$ (personnes rétablies). Deux paramètres sont fixés : β qui mesure la capacité des individus à être infectés, et λ le nombre de jours moyens d'infection.*

On obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta IS \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta IS - \frac{I}{\lambda} \\ \frac{dR(t)}{dt} = \frac{I}{\lambda} \end{cases}$$

On suppose que les variables `beta` *et* `lam` *(pour λ) sont déjà prédéfinies (variables globales).*

- *Que dire de la quantité $S(t) + I(t) + R(t)$ au cours du temps ? Interpréter.*
- *On pose $Y = \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}$. Écrire la fonction python* `F(Y, t)` *associée à ce système.*

EXERCICE 4 *Écrire le code python qui permet d'utiliser le schéma d'Euler pour tracer des courbes de l'évolution du système ci-dessus en fonction du temps. On prendra $t \in [0, 1]$ et une population initiale avec 999 individus sains et 1 infecté. À vous de choisir un nombre de points (ou un pas de temps) adapté.*

3 Intégration

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On travaille sur un intervalle $[a; b]$ où f est intégrable.

EXERCICE 5 — *On souhaite calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$: en supposant qu'on sait intégrer f sur $[a; b]$, comment calculer cette valeur moyenne mathématiquement ?*

- *On discrétise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles $[\sigma_i; \sigma_{i+1}]$ de tailles égales. Pour $k \in [\![0; n]\!]$, exprimer σ_k en fonction de a, b, k et n.*

EXERCICE 6 *Écrire une fonction python* `trapezes(f, a, b, n)` *qui donne une approximation de l'intégrale de f sur $[a; b]$ en utilisant la méthode des trapèzes. Expliquez.*

4 Sécante

La méthode de la sécante permet de trouver une solution approchée de l'équation $f(x) = 0$ en partant de deux réels a et b "pas trop éloignés" d'une solution x_0. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et pour $n \geq 1$, u_{n+1} est l'abscisse de l'intersection entre l'axe des x et la sécante au graphe de f passant par les points d'abscisses u_{n-1} et u_n.

Dans la suite, on supposera qu'on est bien dans un cas où $f(u_n) \neq f(u_{n-1})$ et $u_n \neq u_{n-1}$ pour tout n.

EXERCICE 7 *Faire un dessin* lisible *avec le graphe d'une fonction f, deux abscisses u_{n-1} et u_n pas trop éloignées d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, la sécante au graphe de f aux points décrits ci-dessus, et la valeur de u_{n+1}*

Montrer qu'on a pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})} \times f(u_n)$. Justifier (un peu long)!!!

EXERCICE 8 *Pour $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$ et $b = 2$, calculer les valeurs de u_2 et u_3*

EXERCICE 9
- *Donner un test d'arrêt raisonnable pour un algorithme ayant pour objectif d'approcher une solution de $f(x) = 0$ à ε près.*
- *Programmer en python :*

```
def secantes(f, u0, u1, epsilon):
    ...
```

5 Pivot de Gauss - questions faciles

On considère le code suivant, et on suppose que les fonctions `pivot_partiel(A, j)`, `transvection(A, i, j, mu)`, `dilatation(A, i, c)` et `echanger(A, i, j)` existent.

Rappel :
- la fonction `pivot_partiel(A, j)` prend en entrée un numéro de colonne j et renvoie un numéro de ligne i : celui de la plus grande valeur, en valeur absolue, sous la diagonale. En particulier, on a $i \geq j$.
- Les transvections et dilatations et échanges sont des opérations sur les lignes (respectivement $L_i \leftarrow L_i + \mu \times L_j$, $L_i \leftarrow c \times L_i$ et $L_i \leftrightarrow L_j$)

```
def gauss(A, B):
    n, p = dim(A)
    for j in range(p):
        ligne_pivot_partiel = pivot_partiel(A, j)
        echanger(A, j, ligne_pivot_partiel)
        echanger(B, j, ligne_pivot_partiel)
        for i in range(n):
            if i != j:   # pas sur la diagonale
                transvection(A, i, j, -A[i][j]/A[j][j])
                transvection(B, i, j, -A[i][j]/A[j][j])  # <--- Erreur à corriger : cf. ci-dessous
            else:
                coeff = 1/A[i][i]
                dilatation(A, i, coeff)
                dilatation(B, i, coeff)
    return A, B
```

EXERCICE 10 *Expliquez :*
- *Comment corriger ce qui ne va pas dans la ligne ci-dessus? (*`transvection(B, i, j, -A[i][j]/A[j][j])`*) Dans la suite on supposera que la correction a été effectuée.*
- *Comment utiliser les code ci-dessus pour calculer l'inverse d'une matrice carrée inversible A ?*

EXERCICE 11 *Appliquer le pivot de Gauss* en utilisant le code ci-dessus *avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Vous pouvez présenter les calculs sous forme de deux matrices, ou avec une matrice augmentée, mais suivez les étapes données par le code python.

EXERCICE 12 *Écrire la fonction* `pivot_partiel(A, j)`.