ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2018 **FILIÈRE MP**

COMPOSITION D'INFORMATIQUE–MATHÉMATIQUES – (ULCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation de calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Sous-décalages et algorithmique des morphismes

Dans ce sujet on s'intéresse à des suites bi-infinies de symboles (les configurations), des ensembles de telles suites (les sous-décalages), et des applications entre ces ensembles (les morphismes). Ces différents objets peuvent être vus à la fois d'un point de vue combinatoire et d'un point de vue topologique, ce qui en fait leur richesse.

Les algorithmes devront être écrits en Caml Light *ou dans un format pseudo-code proche.*

Préliminaires

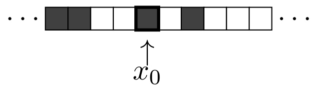
Ensembles. Si E est un ensemble fini, on notera $|E|$ son cardinal. Un **alphabet** A est un ensemble fini non vide, dont les éléments sont appelés les **lettres**. Étant donnés deux entiers $\ell \leq r \in \mathbb{Z}$, on notera $[\ell; r]$ pour l'ensemble d'entiers $\{\ell, \ell+1, \ldots, r-1, r\}$. Si $f : E \to F$ est une fonction, alors **l'image** de $X \subseteq E$ par f est l'ensemble $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. On rappelle le **principe des tiroirs infinis** : si E est un ensemble infini et F est un ensemble fini, alors pour toute fonction $f : E \to F$ il existe un $x \in F$ tel que l'image réciproque de $\{x\}$ par f est infinie.

Arithmétique. Étant donné un entier n, rappelons que (n mod 2) désigne le reste de la division entière de n par 2.

Partie I. Configurations, topologie et sous-décalages

Une **configuration** est un élément de $A^{\mathbb{Z}}$, autrement dit une application $x : \mathbb{Z} \to A$, ou encore un mot bi-infini. Pour alléger les notations on notera x_i la lettre $x(i)$. Sur l'exemple ci-dessous, x est une configuration de $\{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}}$, et la lettre x_0 est $\blacksquare$.

$x \in \{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}}$



Un **motif** est un élément de $A^{[\ell;r]}$, où $\ell \leq r \in \mathbb{Z}$, autrement dit une fonction $p : [\ell;r] \to A$. L'ensemble $[\ell;r]$ est le **support** du motif p. Si $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est une configuration, on note $x_{[\ell;r]}$ le motif correspondant à la restriction de x à $[\ell;r]$. Un motif $p \in A^{[\ell;r]}$ **apparaît** dans la configuration x s'il existe un entier $i \in \mathbb{Z}$ tel que $x_{i+j} = p_j$ pour tout $j \in [\ell;r]$. Dans ce cas, on écrit $p \sqsubset x$. Si $p \in A^{[\ell;r]}$ et $p' \in A^{[\ell';r']}$ sont deux motifs tels que $[\ell;r] \subseteq [\ell';r']$ et $p_i = p'_i$ pour tout $i \in [\ell;r]$, on dit que p est un **sous-motif** de p' et on écrit $p \sqsubseteq p'$ (ou encore $p \sqsubset p'$ si $[\ell;r] \subsetneq [\ell';r']$).

Étant donné un motif $p \in A^{[\ell;r]}$, le **cylindre** porté par p est l'ensemble de toutes les configurations qui coïncident avec p sur son support :

$$[\![p]\!] = \left\{ x \in A^{\mathbb{Z}} \, : \, x_{[\ell;r]} = p \right\}.$$

En d'autres termes, le cylindre $[\![p]\!]$ est exactement l'ensemble des configurations qui prolongent le motif p.

Question 1. *On considère le motif $p = 1100 \in \{0,1\}^{[0;3]}$. On définit trois configurations $x, y, z \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ comme suit*

- $x = 0^{\mathbb{Z}}$ *;*
- $y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *définie par* $y_i = 0 \Leftrightarrow i \geq 0$ *;*
- $z \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *définie par* $z_i = 0 \Leftrightarrow i \geq 2$.

Pour chacune d'elle, préciser si

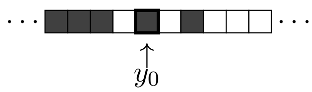
1. *le motif p apparaît dans la configuration ;*
2. *la configuration appartient au cylindre $[\![p]\!]$.*

Nous allons munir l'espace des configurations $A^{\mathbb{Z}}$ d'une application $d_A : A^{\mathbb{Z}} \times A^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^+$, que l'on appellera *distance*. Par analogie avec le cas des espaces vectoriels normés, cette distance permettra de définir une topologie. Si x et y sont deux configurations différentes de $A^{\mathbb{Z}}$, on définit la **distance** d_A entre x et y par

$$d_A(x,y) = 2^{-\min\{|i| \, : \, x_i \neq y_i\}},$$

et on ajoute la convention que $d_A(x,x) = 0$ pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$. Autrement dit, deux configurations sont d'autant plus proches qu'elles partagent un grand motif central commun. Par exemple, la configuration x ci-dessus et la configuration y dessinée ci-dessous sont à distance $\frac{1}{4}$, car $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$ et $x_{-1} = y_{-1}$ mais $x_{-2} \neq y_{-2}$.

$y \in \{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}}$



On notera simplement d pour la distance d_A lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Question 2. *Calculer les distances $d(x,y)$, $d(y,z)$, et $d(x,z)$ pour les configurations x, y et z de la question 1.*

La distance d permet de définir, toujours par analogie avec le cas des espaces vectoriels normés, les notions d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé. Si $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est une configuration et r est un réél strictement positif, on appelle **boule ouverte** de rayon r et de centre x l'ensemble des configurations à distance de x strictement plus petite que r :

$$B(x,r) = \left\{ y \in A^{\mathbb{Z}} \, : \, d(x,y) < r \right\}.$$

On dit qu'un ensemble $U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est **ouvert** si pour toute configuration $x \in U$, il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x,r)$ est incluse dans U. On dit qu'un ensemble $F \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est **fermé** si son complémentaire est ouvert.

Question 3. *Montrer qu'une intersection quelconque d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

Une suite d'éléments de $A^{\mathbb{Z}}$ est une fonction $s : \mathbb{N} \to A^{\mathbb{Z}}$. Par analogie avec le cas des espaces vectoriels normés, on dit qu'une telle suite s est **convergente** s'il existe une configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq N, \; d(s(n), x) < \varepsilon$$

La configuration x (qui est nécessairement unique) est la **limite** de la suite s.

On admet pour toute la suite le fait suivant :

— *Un ensemble $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est fermé si et seulement si X contient la limite de toute suite convergente d'éléments de X.*

Question 4. *Soit $p \in A^{[\ell;r]}$ un motif, avec $\ell \leq r \in \mathbb{Z}$. Montrer que le cylindre $[\![p]\!]$ est à la fois ouvert et fermé pour la topologie définie par la distance d.*

On définit la **translation** $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ par $(\sigma(x))_j = x_{j+1}$ pour toute configuration x et tout entier $j \in \mathbb{Z}$.

Question 5. *Vérifier que σ est une bijection, et exprimer son inverse σ^{-1}.*

On définit à présent les itérées de σ : par convention σ^0 est l'identité, et pour tout $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a $\sigma^{|i|} = \sigma \circ \sigma^{|i|-1}$ et $\sigma^{-|i|} = \sigma^{-1} \circ \sigma^{-|i|+1}$. Un ensemble $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est invariant par translation si $\sigma^i(x) \in X$ pour tout $x \in X$ et tout $i \in \mathbb{Z}$. Un **sous-décalage** est un ensemble $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ qui est à la fois fermé et invariant par translation.

Question 6. *Parmi les ensembles de configurations définis ci-dessous, lesquels sont des sous-décalages ? Justifier vos réponses.*

1. $X_1 = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \, : \, x_i = 0 \Rightarrow |i| \text{ est pair} \right\}$.
2. $X_2 = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \, : \, |\{ i \in \mathbb{Z} \, : \, x_i = 1 \}| = 1 \right\}$.
3. $X_3 = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \, : \, |\{ i \in \mathbb{Z} \, : \, x_i = 1 \}| \leq 1 \right\}$.

La question suivante montre la *compacité* de l'espace $A^{\mathbb{Z}}$ muni de la distance d, qui est une propriété fondamentale et qui sera utilisée à plusieurs reprises dans la suite.

Question 7. *Montrer que toute suite d'éléments de $A^{\mathbb{Z}}$ a une suite extraite qui converge dans $A^{\mathbb{Z}}$.* Indication : pour construire la limite de la suite extraite convergente, on pourra utiliser le principe des tiroirs infinis sur des supports imbriqués de taille croissante.

Si X est un ensemble de configurations, le **langage** de X est l'ensemble $\mathcal{L}(X)$ des $x_{[\ell;r]}$ pour $x \in X$ et $\ell \leq r \in \mathbb{Z}$. De plus, on note $\overline{\mathcal{L}(X)}$ pour l'ensemble des motifs $p \in A^{[\ell;r]}$ avec $\ell \leq r \in \mathbb{Z}$ et tels que $p \notin \mathcal{L}(X)$.

Nous introduisons maintenant trois notions utiles à l'étude des langages d'ensembles de configurations.

— Un ensemble de motifs $\mathcal{L}$ est **stable par sous-motif** si pour tout motif $p \in \mathcal{L}$, chacun de ses sous-motifs est aussi dans cet ensemble : $\forall p' \sqsubseteq p, p' \in \mathcal{L}$.

— Un ensemble de motifs $\mathcal{L}$ est **prolongeable** si pour tout motif $p \in A^{[\ell;r]}$ tel que $p \in \mathcal{L}$, il existe un motif $p' \in A^{[\ell';r']}$ avec $[\ell-1;r+1] \subseteq [\ell';r']$ et tel que $p' \in \mathcal{L}$ et $p \sqsubset p'$.

— Un ensemble de motifs $\mathcal{L}$ est **stable par translation** si pour tout motif $p \in \mathcal{L}$, on a $\sigma(p) \in \mathcal{L}$ et $\sigma^{-1}(p) \in \mathcal{L}$, où, pour $p \in A^{[\ell;r]}$, les motifs $\sigma(p)$ et $\sigma^{-1}(p)$ sont définis par

$$\begin{array}{rcccl} \sigma(p) & : & [\ell-1;r-1] & \longrightarrow & A \\ & & j & \longmapsto & p_{j+1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccl} \sigma^{-1}(p) & : & [\ell+1;r+1] & \longrightarrow & A \\ & & j & \longmapsto & p_{j-1} \end{array}$$

Question 8. *Montrer que si un ensemble de motifs $\mathcal{L}$ est le langage d'un sous-décalage, alors $\mathcal{L}$ est à la fois stable par translation, stable par sous-motif et prolongeable.*

Si E est un ensemble de motifs, on définit X_E comme étant l'ensemble des configurations dans lesquelles aucun motif de E n'apparaît, c'est-à-dire :

$$X_E = \left\{ x \in A^{\mathbb{Z}} \,:\, \forall \ell \leq r \in \mathbb{Z}, \forall i \in \mathbb{Z},\ \sigma^i\left(x_{[\ell;r]}\right) \notin E \right\}.$$

Question 9.

1. *Montrer que pour tout ensemble de motifs E, l'ensemble X_E est un sous-décalage.* Indication : on pourra écrire X_E à l'aide de cylindres.
2. *Montrer que pour tout sous-décalage X, on a $X = X_{\overline{\mathcal{L}(X)}}$, où $X_{\overline{\mathcal{L}(X)}}$ est l'ensemble des configurations qui évitent les motifs de $\overline{\mathcal{L}(X)}$, comme défini ci-dessus.*
3. *En déduire que $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est un sous-décalage si et seulement s'il existe un ensemble de motifs E tel que $X = X_E$.*

Question 10. *Montrer que si un ensemble de motifs $\mathcal{L}$ est à la fois stable par translation, stable par sous-motif et prolongeable, alors c'est le langage d'un sous-décalage.*

Partie II. Morphismes

Dans cette partie, on étudie les *morphismes*. Les morphismes sont des fonctions sur les configurations possédant certaines propriétés.

On fixe deux alphabets A et B. Une **fonction locale** est la donnée d'un intervalle $V = [-\ell; r]$ avec $\ell, r \in \mathbb{N}$, appelé **voisinage**, et d'une application $\varphi : A^{\ell+r+1} \to B$. Une application $\Phi : A^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$ est un **morphisme** s'il existe une fonction locale $([-\ell; r], \varphi)$ telle que pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$, en notant $y = \Phi(x)$, pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$ on a

$$y_i = \varphi(x_{i-\ell},\, x_{i-\ell+1},\, \dots,\, x_{i+r-1},\, x_{i+r})$$

Question 11.

1. *Soit le morphisme $\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ donné par la fonction locale $([-1;1], \varphi)$ définie par*
$$\varphi(a,b,c) \;=\; a+b+c \pmod 2.$$
Ce morphisme Φ est-il injectif ? surjectif ?
2. *Soit le morphisme $\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ donné par la fonction locale $([-1;1], \psi)$ définie par*
$$\begin{cases} \psi(0,0,0) = \psi(0,1,0) = \psi(1,1,0) = \psi(1,1,1) = 0 \\ \psi(0,0,1) = \psi(0,1,1) = \psi(1,0,0) = \psi(1,0,1) = 1. \end{cases}$$
Ce morphisme Ψ est-il injectif ? surjectif ?
3. *Montrer que la translation σ peut être vue comme un morphisme, dont on précisera le voisinage et la fonction locale.*

Par analogie avec le cas des espaces vectoriels normés, on dit qu'une fonction $f : A^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$ est **continue** si

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in A^{\mathbb{Z}},\ \big(d_A(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon\big),$$

et qu'elle est **uniformément continue si**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in A^{\mathbb{Z}} \times A^{\mathbb{Z}},\ \big(d_A(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon\big).$$

On admet, et on pourra utiliser dans toute la suite, la formulation suivante du *théorème de Heine* :

— Si $f : A^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$ est une fonction continue, alors elle est uniformément continue.

Question 12.

1. *Montrer que la translation σ est continue.*
2. *Montrer que $\Phi : A^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$ est un morphisme si et seulement si Φ est continue et commute avec la translation σ.* Indication : on pourra utiliser le théorème de Heine.

On fixe, pour toute la suite de cette partie, deux alphabets A, B, un morphisme $\Phi : A^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$, et sa fonction locale (V, φ). Sans perte de généralité, on suppose pour toute la suite de cette partie que le voisinage V est de la forme $V = [-r; r]$ pour $r \in \mathbb{N}$.

Un motif est **orphelin** pour Φ s'il n'apparaît dans aucune configuration appartenant à $\Phi(A^{\mathbb{Z}})$.

Question 13. *Les morphismes Φ et Ψ de la question 11 possèdent-ils des motifs orphelins ?*

La fonction locale (V, φ) permet de définir les **fonctions locales étendues aux motifs**, qui sont, pour $m \in \mathbb{N}$, les fonctions $\varphi_m : A^{[-(m+r);m+r]} \to B^{[-m;m]}$ telles que

$$\begin{array}{rccl} \varphi_m(u) & : & [-m;m] & \longrightarrow & B \\ & & i & \longmapsto & \varphi(u_{-r+i}, \ldots, u_{r+i}) \end{array}$$

pour tout motif $u \in A^{[-(m+r);m+r]}$.

Question 14.

1. *Montrer que Φ est surjectif si et seulement si toutes ses fonctions locales étendues aux motifs φ_m le sont.*
2. *Montrer que s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que la fonction locale étendue φ_m n'est pas surjective, alors Φ a un motif orphelin.*
3. *En déduire que Φ est surjectif si et seulement si Φ ne possède pas de motif orphelin.*

On dit que deux configurations $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ sont **asymptotiques** si l'ensemble $\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\}$ est fini. On dit que Φ est **pré-injectif** si pour toutes configurations *asymptotiques* $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$, on a $x \neq y \Rightarrow \Phi(x) \neq \Phi(y)$.

On admet pour toute la suite la propriété suivante des morphismes de $A^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même :
— *$\Phi : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ est surjectif si et seulement si Φ est pré-injectif.*

Partie III. Algorithmes par les graphes

Dans cette partie on présente deux algorithmes qui permettent de déterminer si un morphisme de $A^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même est surjectif ou bijectif. Ces algorithmes sont basés sur une représentation des morphismes à l'aide de graphes orientés.

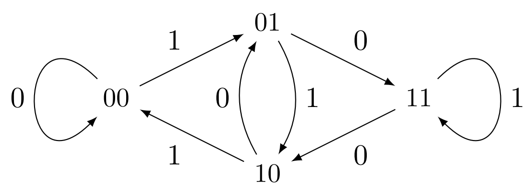
Pour toute cette partie, on fixe un alphabet A ainsi qu'une bijection $\mathrm{code}_n : A^n \to [0; |A|^n - 1]$ *pour chaque $n \in \mathbb{N}$.*

Soit $\Phi : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ un morphisme de fonction locale $([-\ell; r], \varphi)$, où $\ell, r \in \mathbb{N}$. On définit le **graphe de** φ comme étant le graphe orienté $\mathcal{G}_\varphi = (S, R)$ dont

- l'ensemble des sommets S est l'ensemble $A^{\ell+r}$ des mots de taille $\ell + r$ sur l'alphabet A ;
- l'ensemble des arêtes $R \subseteq S \times S$ contient (w, w') si et seulement si ($w = au$ et $w' = ub$) avec $a, b \in A$.

De plus, le graphe $\mathcal{G}_\varphi$ est equipé d'une **fonction d'étiquetage**, qui à chaque arête $(au, ub) \in R$ associe $\varphi(aub)$.

On remarque que tous les sommets du graphe $\mathcal{G}_\varphi$ ont degrés entrant et sortant $|A|$. Par exemple, pour le morphisme $\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ donné par la fonction locale $([-1; 1], \varphi)$ de la question 11, on obtient le graphe $\mathcal{G}_\varphi$ suivant :



Dans un tel graphe $\mathcal{G}_\varphi$, une configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$ peut être vue comme un chemin bi-infini de sommets, et on obtient l'image de cette configuration par le morphisme Φ en lisant les étiquettes reliant les sommets successifs de ce chemin.

Question 15. *Dessiner le graphe $\mathcal{G}_\psi$ pour le morphisme $\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ donné par la fonction locale $([-1; 1], \psi)$ de la question 11. On indiquera les valeurs de la fonction d'étiquetage de $\mathcal{G}_\psi$ sur les arêtes de $\mathcal{G}_\psi$.*

On définit à présent un autre graphe $\mathcal{H}_\varphi$ qui va nous permettre d'étudier simultanément deux configurations. Il nous permettra de vérifier l'injectivité (et donc la bijectivité) d'un morphisme, mais aussi sa surjectivité. Le graphe $\mathcal{H}_\varphi = (S^2, \mathcal{W})$ est défini par

$$\mathcal{W} = \{((s_1, t_1), (s_2, t_2)) : (s_1, s_2) \text{ et } (t_1, t_2) \text{ ont les mêmes étiquettes dans } \mathcal{G}_\varphi\} \subseteq S^2 \times S^2.$$

Notons que si $((s_i, t_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ est un chemin bi-infini dans $\mathcal{H}_\varphi$, alors en notant a_i et b_i respectivement la première lettre de s_i et de t_i, les configurations $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ont même image par Φ. Le graphe $\mathcal{D}_\varphi$ est obtenu en supprimant dans $\mathcal{H}_\varphi$ tous les sommets non reliés dans les

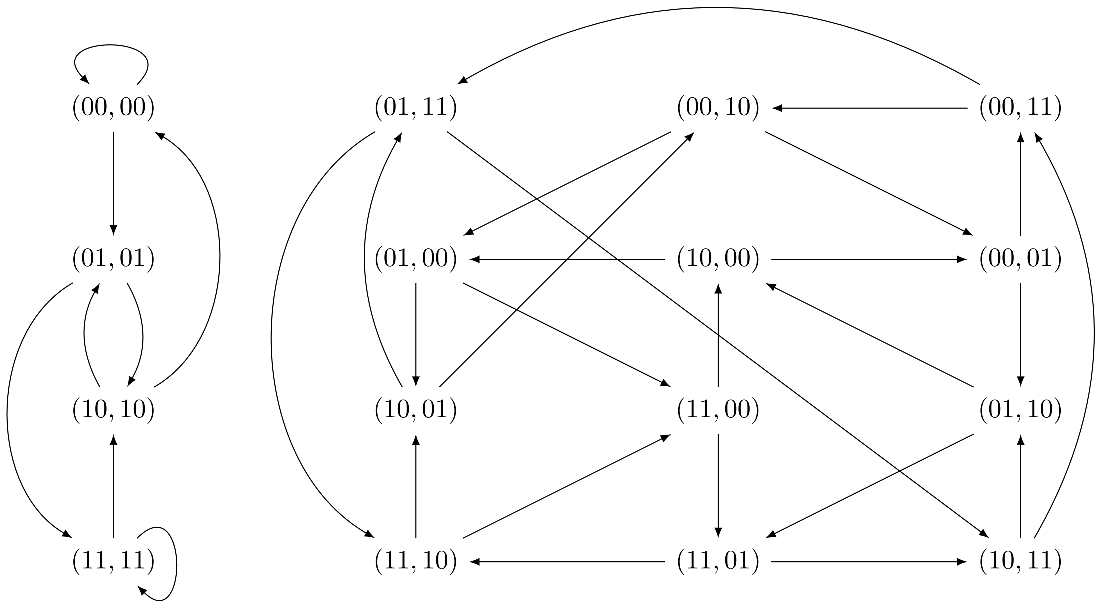


FIGURE 1 – Le graphe $\mathcal{H}_\varphi$ pour la fonction locale $([-1;1],\varphi)$ de la question 11.

deux sens à des composantes fortement connexes. Par exemple, le graphe $\mathcal{H}_\varphi$ pour la fonction locale $([-1;1],\varphi)$ de la question 11 est représenté sur la figure 1. On remarque que $\mathcal{H}_\varphi = \mathcal{D}_\varphi$ et on note deux composantes fortement connexes dans $\mathcal{H}_\varphi$.

Question 16. *Dessiner les graphes $\mathcal{H}_\psi$ et $\mathcal{D}_\psi$ pour le morphisme $\Psi : \{0,1\}^\mathbb{Z} \to \{0,1\}^\mathbb{Z}$ donné par la fonction locale $([-1;1],\psi)$ de la question 11, en veillant à disposer les sommets des graphes comme dans l'exemple ci-dessus.*

Les questions 17, 20 et 22 ci-dessous demandent des algorithmes sur des graphes. Ces graphes seront représentés par listes d'adjacence. De plus, ces algorithmes portent ultimement sur des graphes de la forme $\mathcal{H}_\varphi$, c'est-à-dire des graphes dont les sommets sont des couples $(v,w) \in S^2$. On se donne donc les types Caml Light *suivants :*

```
type sommet == int * int ;;
type graphe == (sommet * sommet list) list ;;
```

On dira que `g : graphe` représente un graphe *si*

- *pour tout* `u : sommet`, `g` *contient au plus un élément de la forme* `(u,voisins)`, *et*
- *pour tout* `u : sommet`, *si* `u` *est un élément de* `voisins'` *pour un élément* `(v,voisins')` *de* `g`, *alors* `g` *a un élément de la forme* `(u,voisins)`.

Le graphe $\mathcal{G}$ représenté par `g` *a alors pour sommets les* `u : sommet` *tels que* `g` *contient un élément de la forme* `(u,voisins)`, *et $\mathcal{G}$ a une arête de* `u` *vers* `v` *si et seulement si* `voisins` *contient* `v`.

Soit `g : graphe` *représentant un graphe $\mathcal{G}$, et soit $\mathcal{H}$ un graphe dont les sommets sont dans S^2, où S est de la forme A^n. On dit que* `g` représente $\mathcal{H}$ par code_n *lorsque :*

— *l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$ est l'ensemble des* $(\mathrm{code}_n(s), \mathrm{code}_n(t))$ *tels que* (s,t) *est un sommet de* $\mathcal{H}$*, et*
— $\mathcal{G}$ *a une arête de* $(\mathrm{code}_n(s), \mathrm{code}_n(t))$ *vers* $(\mathrm{code}_n(s'), \mathrm{code}_n(t'))$ *si et seulement si* $\mathcal{H}$ *a une arête de* (s,t) *vers* (s',t')*.*

En plus des fonctionnalités de base du langage Caml Light*, le candidat pourra utiliser les fonctions suivantes sans les programmer :*
— `mem : 'a -> 'a list -> bool`
`mem x l` *renvoie* `true` *si et seulement si* `x` *est un élément de* `l`*.*
— `filter : ('a -> bool) -> 'a list -> 'a list`
`filter p l` *renvoie la liste des éléments* `x` *de* `l` *tels que* `p x = true`*.*

On ne demande pas des programmes de complexité optimale : seule leur correction sera évaluée. Les candidats sont donc encouragés à proposer des solutions simples.

Question 17. *1. Écrire une fonction* `chemin : graphe -> sommet -> sommet -> bool` *telle que si* `g : graphe` *représente le graphe* $\mathcal{G}$*, alors* `chemin g u v` *renvoie* `true` *si* `u` *et* `v` *sont des sommets de* $\mathcal{G}$ *et s'il existe dans* $\mathcal{G}$ *un chemin de* `u` *vers* `v`*, et renvoie* `false` *sinon.*

2. On dit qu'un sommet u est non-isolé *s'il existe un sommet $v \neq u$ ainsi qu'un chemin de u à v et un chemin de v à u. Un sommet est* isolé *s'il n'est pas non-isolé.*
Écrire une fonction `isole : graphe -> sommet -> bool` *telle que si* `g : graphe` *représente le graphe* $\mathcal{G}$*, alors* `isole u` *renvoie* `true` *si* `u` *est un sommet isolé dans* $\mathcal{G}$*, et renvoie* `false` *sinon. La fonction doit renvoyer* `false` *si* `u` *n'est pas un sommet de* $\mathcal{G}$*.*

3. Écrire une fonction `elagage : graphe -> graphe` *telle que si* `g : graphe` *représente le graphe* $\mathcal{G}$*, alors* `elagage g` *renvoie un* `g' : graphe` *représentant le plus grand sous-graphe de* $\mathcal{G}$ *dont tous les sommets appartiennent à une composante fortement connexe de* $\mathcal{G}$*.*

Question 18. *Montrer que tous les sommets de la forme $(w,w) \in S^2$ sont dans la même composante fortement connexe de $\mathcal{D}_\varphi$.*

Dans le graphe $\mathcal{D}_\varphi$, on appelle $\overline{\mathcal{G}}_\varphi$ la composante fortement connexe contenant tous les sommets de la forme (w,w), où $w \in S$.

Question 19. *Montrer que le morphisme de fonction locale $([-\ell; r], \varphi)$ est bijectif si et seulement si $\overline{\mathcal{G}}_\varphi$ ne contient que des sommets de la forme (w,w), et $\overline{\mathcal{G}}_\varphi$ est la seule composante fortement connexe de $\mathcal{D}_\varphi$.* Indication : on se rappellera que Φ est surjectif si et seulement si Φ est pré-injectif.

Question 20. *Soit Φ un morphisme de fonction locale $([-\ell; r], \varphi)$. Écrire une fonction* `bijectif : graphe -> bool` *telle que si* `g : graphe` *représente* $\mathcal{H}_\varphi$ *par* $\mathrm{code}_{\ell+r+1}$*, alors* `bijectif g` *revoie* `true` *si Φ est un morphisme bijectif, et renvoie* `false` *sinon.*

Question 21. *Montrer que le morphisme de fonction locale $([-\ell; r], \varphi)$ est surjectif si et seulement si $\overline{\mathcal{G}}_\varphi$ ne contient que des sommets de la forme (w,w).* Indication : on se rappellera que Φ est surjectif si et seulement si Φ est pré-injectif.

Question 22. *Soit Φ un morphisme de fonction locale $([-\ell; r], \varphi)$. Écrire une fonction* `sujectif : graphe -> bool` *telle que si* `g : graphe` *représente* $\mathcal{H}_\varphi$ *par* $\mathrm{code}_{\ell+r+1}$*, alors* `surjectif g` *revoie* `true` *si Φ est un morphisme surjectif, et renvoie* `false` *sinon.*