

Corrigé de la composition d'informatique-mathématiques

ENS - MP - 2019

1 Rappel et définitions préliminaires

1.1. L'énoncé aurait du rappeler le rôle des fonctions `List.map` et `List.mem` et parler de la fonction `List.iter`, utile pour les questions de programmation. Sans chercher à diminuer le temps de calcul de la vérification, nous utilisons l'analyse suivante :

- nous définissons une exception `Pb` qui sera déclenchée dès qu'un problème sera détecté;
- nous stockons dans les piles `sommets` et `aretes` les sommets et les arêtes définis par la structure g , par le biais de deux fonctions auxiliaires :
 - a) la fonction `ajoute_arete`, appliquée à deux sommets a et b , vérifie que $a \neq b$: si c'est le cas, elle ajoute le couple (a, b) à la pile `aretes`; sinon, elle déclenche l'exception `Pb`;
 - b) la fonction `test`, appliquée à un couple (a, v) (a est un sommet du graphe et v la liste de ses voisins), déclenche l'exception `Pb` si a est élément de v et applique `ajoute_arete` à a et b pour tout b élément de v .
- il reste ensuite à vérifier que pour chaque arête (a, b) détectée, (b, a) est également une arête de g .
- une fois toutes les arêtes vérifiées, nous renvoyons le booléen `true` et l'exception `Pb` est rattrapée en renvoyant le booléen `false`.

```
exception Pb;;
```

```
let est_graphe g =
  try
    let sommets = ref [] and aretes = ref [] in
    let ajoute_arete a b =
      match a <> b with
      | true -> aretes := (a,b)::(!aretes)
      | _ -> raise Pb in
    let test (a,v) = match List.mem a !sommets with
      | true -> raise Pb
      | _ -> sommets := a::(!sommets) ;
      List.iter (ajoute_arete a) v; in
    let rec verifie_arete g (a,b) = match g with
      | [] -> raise Pb
      | (c,v)::_ when c = b && List.mem a v -> ()
      | (c,v)::_ when c = b -> raise Pb
      | _::q -> verifie_arete q (a,b) in
    List.iter test g;
    List.iter (verifie_arete g) !aretes;
    true
  with
    Pb -> false;;
```

1.2. Nous utilisons trois fonctions auxiliaires :

- a) `supprimer1`, appliquée au graphe g , renvoie le couple (v, g_1) où v est la liste des voisins de u et g_1 la liste g privée (éventuellement) de l'élément (u, v) ;
- b) `supprimer2` supprime (éventuellement) le sommet u d'une liste de sommets (on considère qu'un sommet apparaît au plus une fois dans une liste de voisins) ;
- c) `supprimer3` s'applique à un couple (a, v) (où v est la liste des voisins de a) et renvoie le couple (a, v') où v' est obtenue en supprimant (éventuellement) u de v .

```
let retire_sommet u g =
  let rec supprimer1 g = match g with
    | [] -> [], []
    | (a,v)::g1 when a = u -> v, g1
    | (a,v)::g1 -> let w, g2 = supprimer1 g1 in w, (a,v)::g2 in
  let rec supprimer2 v = match v with
    | [] -> []
    | a::q when a = u -> q (* ou supprimer2 q si doublons permis *)
    | a::q -> a::(supprimer2 q) in
  let supprimer3 (a,v) = (a, supprimer2 v) in
  let v, g1 = supprimer1 u g in
  List.map supprimer3 g1;;
```

2 Le jeu des gendarmes et des voleurs

- 2.1. Le voleur peut échapper au gendarme en commençant par se placer hors de sa portée (c'est-à-dire en un sommet à distance 2 de la position initiale du gendarme), puis en conservant à chaque coup cette propriété (si A et B sont deux sommets distincts de C_5 , il existe un sommet $C \in \mathcal{V}^*(B)$ situé à la distance 2 de A).
- 2.2. Dans la partie représentée ci-dessous, les coups du voleur sont forcés, car tout autre choix conduit à une fin de partie (si le voleur choisit de déplacer sur un $u \in \mathcal{V}_G^*(v)$ où v est occupé par un gendarme, les gendarmes gagne la partie au coup suivant). Cela donne :

v	γ_1	γ_3	γ_5
B_4	A_1	A_3	A_5
B_4	A_3	B_3	A_5
A_4	A_3	B_3	A_5
A_4	A_1	B_4	B_5
A_2	A_1	B_4	B_5
A_2	A_1	A_4	B_5
B_2	A_1	A_4	B_5
B_2	A_3	A_2	B_1

et depuis cette dernière position, le voleur ne peut aller qu'en B_1 , B_3 ou A_2 et ne peut plus échapper aux gendarmes.

Notation : une stratégie φ^V pour le voleur (resp. (κ_i, ψ^G) pour le voleur) sera notée φ (resp. (κ_i, ψ)), le choix de la lettre φ ou ψ permettant déjà de distinguer les deux types de stratégie.

Remarque : l'énoncé ne devrait pas parler des ensembles \mathcal{C}_k et $\mathcal{R}_k \dots$

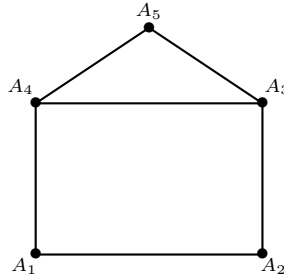
2.3. Graphe $G_{(i)}$: un gendarme ne suffit pas à capturer le voleur (comme pour \mathcal{C}_5 , le voleur peut se déplacer à la distance 2 du gendarme à chacun de ses coups) ; par contre, on a une stratégie gagnante évidente pour deux gendarmes en les faisant tourner dans le sens contraire ; si besoin, on peut formaliser : on note A_0, \dots, A_7 les sommets du graphe numérotés dans le sens trigonométrique, f la bijection $A_p \mapsto A_{p+1 \bmod 8}$ et on définit la stratégie des gendarmes :

- $\kappa_i = (A_1, A_8)^V$;
- pour toute position des gendarmes $(v, \gamma_1, \gamma_2)^G$, $\psi((v, \gamma_1, \gamma_2)^G) = (v, f(\gamma_1), f^{-1}(\gamma_2))^G$

qui est gagnante. Le graphe $G_{(i)}$ est donc dans \mathcal{C}_2 mais pas dans \mathcal{C}_1 .

$G_{(ii)}$ est dans \mathcal{C}_1 (donc dans \mathcal{C}_2) : en plaçant un gendarme en n'importe quel sommet A , on peut voir le graphe comme un arbre enraciné en A : une fois le voleur placé, le gendarme n'a plus qu'à se diriger vers lui pour le capturer (à chaque coup du gendarme, le voleur reste sur la partie de branche reliant le gendarme à une feuille et la profondeur du gendarme diminue d'une unité : on ne peut pas avoir de partie infinie).

Numérotons les sommets de $G_{(iii)}$:



Le voleur a une nouvelle fois une stratégie gagnante contre un seul gendarme, qui consiste à se déplacer (ou à rester en place) à chaque coup en évitant le sommet A_5 et en se mettant à la distance 2 du gendarme. Plus précisément :

- si le gendarme est initialement en A_5 , le voleur se place en A_1 ; sinon, il se place sur le carré $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ à l'opposé du gendarme.
- si le gendarme monte en A_5 , le voleur (qui est toujours dans le carré \mathcal{C} à l'opposé du gendarme) reste en place en A_1 ou A_2 ;
- si le gendarme se déplace en un point de \mathcal{C} , le voleur se déplace (ou reste en place) pour être à l'opposé du gendarme.

Par contre, il existe une stratégie gagnante pour deux gendarmes : on initialise par $\kappa_i = (A_3, A_4)^V$ et dès son premier coup, le voleur est soit sur une case occupée par un gendarme, soit en position de prise par un gendarme. On a donc $G_{(iii)} \in \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1$.

2.4. Le cycle \mathcal{C}_4 n'est pas élément de \mathcal{C}_1 et est de taille 8.

Soit $G \in \mathcal{R}_1$. Alors G a au moins 4 sommets (sinon, un de ses sommets serait voisin de tous les autres sommets : il suffit donc d'initialiser la partie en plaçant le gendarme sur ce sommet pour obtenir une stratégie gagnante pour un unique gendarme). En notant n le nombre de sommets de G , on a au moins $n - 1$ arêtes pour assurer la connexité du graphe. D'autre part, avec seulement $n - 1$ arêtes, le graphe serait un arbre, donc élément de \mathcal{C}_1 (même preuve que pour le graphe $G_{(ii)}$). On a donc au moins n arêtes et le graphe est de taille au moins $2n$, donc au moins 8. Ceci prouve la minimalité de \mathcal{C}_4 .

2.5. $s = |\mathcal{S}_G|$ gendarmes suffisent à capturer le voleur (on a une stratégie gagnante pour les gendarmes en choisissant $\kappa_i = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)^V$ avec $\mathcal{S}_G = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$).

Nous noterons dans la suite $\text{copnumber}(G)$ le copnumber d'un graphe G .

2.6. Soit G un graphe et G_1, G_2, \dots, G_p ses composantes connexes (les G_j sont vus comme des sous-graphes de G). Pour chaque j , il existe une stratégie gagnante (κ_i^j, ψ_j) pour $\text{copnumber}(G_j)$ gendarmes dans G_j . Il existe alors une stratégie gagnante dans G pour $\sum_{j=1}^p \text{copnumber}(G_j)$ gendarmes :

- κ_i est la concaténation de $\kappa_1, \dots, \kappa_p$, ce que l'on se permet d'écrire : $\kappa_i = (\kappa_1, \dots, \kappa_p)$;
- pour $(v, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p)^G$ position des gendarmes (Γ_j est donc un $\text{copnumber}(G_j)$ -uplet de sommets de G_j), on note j_0 le numéro de la composante connexe du graphe contenant le sommet v et on pose :

$$\psi_G((v, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p)^G) = (v, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0-1}, \psi_{j_0}((v, \Gamma_{j_0})^{G_{j_0}}, \Gamma_{j_0+1}, \dots, \Gamma_p)^V).$$

Autrement-dit, le jeu se déroule dans la composante connexe G_{j_0} choisie par le voleur lors de son premier coup : les gendarmes posés dans les autres composantes connexes restent fixes et les gendarmes placés dans G_{j_0} suivent la stratégie gagnante $(\kappa_i^{j_0}, \psi_{j_0})$.

On en déduit que $\text{copnumber}(G) \leq \sum_{j=1}^p \text{copnumber}(G_j)$.

Si $1 \leq k < \sum_{j=1}^p \text{copnumber}(G_j)$, le voleur a une stratégie gagnante contre k gendarmes. Elle est un peu plus pénible à définir que celle des gendarmes et nous nous contenterons de la définir informellement : une fois les k gendarmes placés, le voleur choisit le plus petit entier $j_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que G_{j_0} contienne moins de $\text{copnumber}(G_{j_0})$ gendarmes : il lui suffit alors de jouer dans cette composante connexe en utilisant une stratégie gagnante (ce qui est possible par définition du copnumber de G_{j_0}) pour échapper aux gendarmes. Nous avons donc démontré que le copnumber d'un graphe non connexe est la somme des copnumbers de ses composantes connexes.

3 Cas d'un unique gendarme

3.1. Soit (A, B) une partition associée au caractère biparti du graphe. Nous noterons \sim la relation d'équivalence sur \mathcal{S}_G dont les classes sont A et B .

Comme le degré du graphe est au moins 2, A et B sont de cardinal au moins 2. On construit une stratégie gagnante pour le voleur contre un unique gendarme en utilisant les deux propriétés :

- pour tout $\gamma \in G$, il existe $u \in G$ tel que $u \neq \gamma$ et $u \sim \gamma$;
- si $u \not\sim \gamma$, $\exists u' \neq \gamma$, $(u', \gamma) \in \mathcal{A}_G$.

On peut ainsi définir deux applications $f : \mathcal{S}_G \mapsto \mathcal{S}_G$ et $g : (\mathcal{S}_G)^2 \mapsto \mathcal{S}_G$ vérifiant :

$$\forall \gamma \in \mathcal{S}_G, \gamma \neq f(\gamma) \text{ et } \gamma \sim f(\gamma).$$

$$\forall (u, \gamma) \in (\mathcal{S}_G)^2, u \neq \gamma \implies g(u, \gamma) \sim v, g(u, \gamma) \neq v \text{ et } g(u, \gamma) \in \mathcal{V}_G^*(u).$$

Une stratégie gagnante φ pour le voleur contre un gendarme est alors définie par :

$$\forall \gamma \in \mathcal{S}_G, \varphi((\gamma)^V) = (f(\gamma), \gamma)^G$$

$$\forall (u, \gamma) \in \mathcal{S}_G^2, \varphi((u, \gamma)^V) = (g(u, \gamma), \gamma)^G$$

Le gendarme ne peut jamais attraper le voleur car après chaque coup du voleur, le gendarme et le voleur occupent des positions différentes dans la même partie A ou B .

3.2. Nous allons une nouvelle fois définir une stratégie pour le voleur qui va lui permettre à chaque instant d'occuper une position non atteignable depuis la position du gendarme.

- Pour tout $\gamma \in \mathcal{S}_G$, $\mathcal{V}_G^*(\gamma)$ est de cardinal $n + 1 < |\mathcal{S}_G|$ car le graphe n'est pas complet. Il existe donc $u \in G$ tel que $u \notin \mathcal{V}_G^*(\gamma)$.
- Si u et γ sont deux sommets distincts tels qu'il existe γ' vérifiant $\gamma \in \mathcal{V}_G^*(\gamma')$ et $u \notin \mathcal{V}_G^*(\gamma')$ (γ' est la position du gendarme à l'instant précédent et γ sa nouvelle position), il existe un sommet u' tel que $u' \in \mathcal{V}_G^*(u) \setminus \mathcal{V}_G^*(\gamma)$. En effet, si $(u, \gamma) \notin \mathcal{A}_G$, on choisit $u' = u$; sinon, $\mathcal{V}_G^*(u)$ et $\mathcal{V}_G^*(\gamma)$ sont de même cardinal $n + 1$ et distincts (car $\gamma' \in \mathcal{V}_G^*(\gamma) \setminus \mathcal{V}_G^*(u)$), donc $\mathcal{V}_G^*(u) \setminus \mathcal{V}_G^*(\gamma)$ est bien non vide.

On peut alors définir une stratégie gagnante pour le voleur en utilisant deux applications $f : \mathcal{S}_G \mapsto \mathcal{S}_G$ et $g : (\mathcal{S}_G)^2 \mapsto \mathcal{S}_G$ vérifiant :

$$\begin{aligned} & \forall \gamma \in \mathcal{S}_G, f(\gamma) \notin \mathcal{V}_G^*(\gamma) \\ & \forall (u, \gamma) \in (\mathcal{S}_G)^2 / (\exists \gamma', \gamma \in \mathcal{V}_G^*(\gamma') \text{ et } u \notin \mathcal{V}_G^*(\gamma')) \implies g(u, \gamma) \in \mathcal{V}_G^*(u) \setminus \mathcal{V}_G^*(\gamma). \end{aligned}$$

3.3. Soit Φ une rétractation de G sur H et φ_H une stratégie gagnante pour le voleur (contre un gendarme) dans H . On définit alors la stratégie φ_G pour le voleur (toujours contre un gendarme) dans le graphe G par :

$$\begin{cases} \forall \gamma \in G, \varphi_G((\gamma)^V) = \varphi_H((\Phi(\gamma))^V) \\ \forall (u, \gamma) \in G^2, \varphi_G((u, \gamma)^V) = \varphi_H((\Phi(u), \Phi(\gamma))^V) \end{cases}$$

Pour chaque position κ dans G , on note $\Phi(\kappa)$ la position dans H obtenue en remplaçant chaque sommet u de κ par $\Phi(u)$; si $\sigma = \kappa_0.\kappa_1 \dots \kappa_n$ est une partie dans G jouée selon φ_G , alors $\Phi(\sigma) = \Phi(\kappa_0).\Phi(\kappa_1) \dots \Phi(\kappa_n)$ est une partie dans H jouée selon φ_H ; si la partie σ était gagnée par le gendarme, la partie $\Phi(\sigma)$ le serait également, contredisant le caractère gagnant de φ_H : on en déduit que φ_G est une stratégie gagnante, ce qui prouve que G est dans \mathcal{R}_1 . Par contraposée, si G est dans \mathcal{C}_1 , tous ses retracts sont également dans \mathcal{C}_1 .

Remarque : le cycle C_4 est un retract de $G_{(iii)}$ et $C_4 \in \mathcal{R}_1$, donc on retrouve la propriété $G_{(iii)} \in \mathcal{C}_1$.

3.4. L'indication est curieuse (et surtout inutile), puisque la "manière optimale" est la stratégie gagnante. Nous avons, comme dans les exemples précédents :

- si $\gamma \in \mathcal{S}_G$, γ n'est pas relié à tous les sommets de G (sinon, n'importe quel autre sommet de G serait un écueil). Il existe donc $u \in \mathcal{S}_G$ tel que $u \notin \mathcal{V}_G^*(\gamma)$;
- si (u, γ) est un couple de sommets distincts, comme u n'est pas un écueil, $\mathcal{V}_G^*(u) \not\subset \mathcal{V}_G^*(\gamma)$ et il existe $u' \in \mathcal{V}_G^*(u) \setminus \mathcal{V}_G^*(\gamma)$.

On peut une nouvelle fois définir deux applications f et g vérifiant :

$$\begin{aligned} & \forall \gamma \in \mathcal{S}_G, f(\gamma) \notin \mathcal{V}_G^*(\gamma) \\ & \forall (u, \gamma) \in (\mathcal{S}_G)^2 / (u \neq \gamma) \implies g(u, \gamma) \in \mathcal{V}_G^*(u) \setminus \mathcal{V}_G^*(\gamma) \end{aligned}$$

puis définir la stratégie φ :

$$\begin{cases} \forall \gamma \in \mathcal{S}_G, \varphi((\gamma)^V) = (f(\gamma), \gamma)^G \\ \forall (u, \gamma) \in (\mathcal{S}_G)^2, \varphi((u, \gamma)^V) = (g(u, \gamma), \gamma)^G \end{cases}$$

et la stratégie est gagnante. En effet, considérons une partie $(\gamma_1), (u_1, \gamma_1), \dots, (u_n, \gamma_n)$ jouée suivant cette stratégie. On a $u_1 \neq \gamma_1$ par définition de f , puis (quand $n \geq 2$), $u_2 = g(u_1, \gamma_1) \notin \mathcal{V}_G^*(\gamma_1)$, ce qui prouve que $u_2 \neq \gamma_2 = \gamma_1$, puis (pour $n \geq 3$) que $u_3 = g(u_2, \gamma_2) \neq \gamma_3$. Par itération, on montre que $u_i \neq \gamma_i$ pour tout i .

3.5. Remarque : le graphe G' est encore connexe, puisque pour u et v sommets différents de e , un chemin dans G de u à v donne un chemin dans G' de u à v en remplaçant les éventuels sommets e qui interviennent dans ce chemin par le sommet d .

Comme e est un écueil, il existe $d \neq e$ tel que $\mathcal{V}_G^*(e) \subset \mathcal{V}_G^*(d)$. L'application :

$$\Phi : u \mapsto \begin{cases} u & \text{si } u \neq e \\ d & \text{si } u = e \end{cases}$$

est un rétraction de G sur G' ; ainsi, G' est un retract de G et si G est dans \mathcal{C}_1 , G' y est également.

Supposons réciproquement que $G' \in \mathcal{C}_1$ et soit $((g_1)^V, \psi')$ une stratégie gagnante pour un gendarme dans G' . Considérons alors la stratégie $((g_1)^V, \psi)$ dans G , où, pour $(u, g)^G$ position du gendarme dans G :

- si $u \neq e$, $\psi((u, g)^G) = \psi'((u, g)^G)$;
- si $u = e$ et $g \neq d$, $\psi((u, g)^G) = (e, g')^V$ avec $\psi'((d, g)^G) = (d, g')^V$;
- si $u = e$ et $g = d$, $\psi((u, g)^G) = (e, e)^V$.

L'idée, pour les deux premières définitions, est pour le gendarme d'identifier, pour la position du voleur, les sommets e et d , en créant une sorte de "sommet virtuel" ; la dernière définition permet d'attraper le voleur, quand le gendarme est en d et le voleur en e .

Montrons que cette stratégie est gagnante. Soit donc φ_G une stratégie pour le voleur dans G et considérons la stratégie $\varphi'_{G'}$, définie sur G' qui consiste à restreindre φ_G aux positions du voleurs dans G' , mais à remplacer un déplacement vers e par un déplacement vers d (c'est possible car si un sommet u de G' est voisin de e , $d \in \mathcal{V}_{G'}^*(u)$) :

$$\forall g \in \mathcal{S}_{G'}, \varphi'_{G'}((g)^V) = \Phi(\varphi((g)^V)) \text{ et } \forall u, g \in \mathcal{S}_{G'}, \varphi'((u, g)^V) = \Phi(\varphi((u, g)^V))$$

(on reprend les notations de la question 3.3).

Supposons qu'il existe une partie infinie jouée dans G selon φ et $((g_1)^V, \psi)$:

$$(g_1)^V, (u_1, g_1)^G, (u_1, g_2)^V, (u_2, g_2)^G, \dots, (u_{2k-1}, g_{2k})^V, (u_{2k}, v_{2k})^G \dots$$

Alors les g_i sont tous distincts de e ($g_1 \neq e$ et ψ ne place le gendarme en e que pour terminer la partie) et

$$(g_1)^V, (\varphi(u_1), g_1)^G, (\varphi(u_1), g_2)^V, (\varphi(u_2), g_2)^G, \dots, (\varphi(u_{2k-1}), g_{2k})^V, (\varphi(u_{2k}), v_{2k})^G \dots$$

est une partie infinie dans G' jouée selon φ' et $((g_1)^V, \psi')$, ce qui est absurde car $((g_1)^V, \psi')$ est une stratégie gagnante. Nous avons donc démontré que $G \in \mathcal{C}_1$, puisque $((g_1)^V, \psi)$ est une stratégie gagnante pour un gendarme dans G .

3.7. La méthode précédente conduit au graphe singleton $(\{E_3\}, \emptyset)$ en supprimant successivement les sommets $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, D_1, D_2, D_3, D_4, E_1, E_2$: le graphe hexagonal est dans \mathcal{C}_1 .

3.8. Une méthode peu élégante, mais assez facile à écrire :

- **inclus** teste si la liste l_1 est incluse dans la liste l_2 ;

- `domine` teste si u est dominé par u_1 (v et v_1 sont les voisins respectivement de u et u_1); si c'est le cas, u est un écueil, que l'on stocke dans la référence `e` avant de déclencher l'exception `Pb`;
- `ecueil` teste si u est un écueil;
- on essaie ensuite d'appliquer `ecueil` à tous les éléments de la liste g : si l'exception `Pb` n'est pas déclenchée, il n'y a pas d'écueil et on renvoie $(g, false)$; sinon, on récupère l'exception et `e` contient un écueil : on renvoie le graphe modifié (en supprimant l'écueil) et le booléen `true`.

```

let retire_ecueil g =
  let e = ref 0 in
  let rec inclus l1 l2 = match l1 with
    | [] -> true
    | v::l -> List.mem v l2 && inclus l l2 in
  let dimine (u,v) (u1,v1) = match u with
    | _ when u = u1 -> ()
    | _ when inclus (u::v) (u1::v1) -> e := u; raise Pb
    | _ -> () in
  let ecueil (u,v) = List.iter (domine (u,v)) g in
  try
    List.iter ecueil g;
    g, false
  with
    Pb -> retire_sommet !e g, true;;

```

- 3.9. On utilise une référence `reponse` initialisée à la valeur `retire_ecueil g`. Tant que le second élément de `reponse` est égal à `true`, on modifie `reponse` en appliquant la fonction `retire_ecueil`. Quand on sort de la boucle, on renvoie `true` si le graphe final n'a qu'un état et `false` sinon.

```

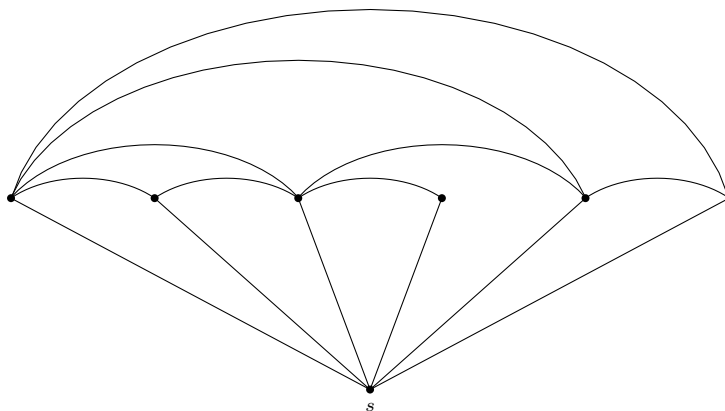
let is_C1 g = let reponse = ref (retire_ecueil g) in
  while snd !reponse do
    reponse := retire_ecueil (fst !reponse)
  done;
  match fst !reponse with
  | [] -> true
  | _ -> false;;

```

4 Capture avec deux gendarmes : le cas des GPE

- 4.1. Soit G un GPE et G' le graphe obtenu en ajoutant à G un sommet universel s . Je ne sais pas trop ce que l'auteur attend comme démonstration de la planarité de G' . On peut évidemment dire que l'on voit bien qu'en choisissant un sommet s à l'extérieur du cercle, il sera possible de relier les sommets du GPE à s par des lignes qui ne se coupent pas, sauf éventuellement en leurs extrémités. On peut aussi utiliser une transformation qui rend la preuve rigoureuse : on fixe un point O du cercle distinct de tous les sommets et on applique à la représentation du graphe une inversion f de centre O . Les sommets du graphe deviennent des points alignés, reliés par des arcs de cercles non sécants (sauf en leurs extrémités) situés tous d'un même côté de la droite d'alignement. On choisit ensuite un sommet situé dans l'autre demi-plan, que l'on relie

à tous les sommets de G : on obtient ainsi une représentation planaire de G' . On peut aussi se passer de l'inversion, en considérant qu'il est évident qu'un GPE possède une représentation planaire où les sommets sont alignés sur l'axe Ox et où les arêtes sont des courbes tracées dans le demi plan ($y \geq 0$). Il suffit de placer le point s dans le demi-plan ($y < 0$) et de le relier à tous les autres sommets pour obtenir une représentation planaire de G' . Avec le deuxième exemple de la figure 5, cela donne :



4.2. Si G est un GPE, le graphe G' obtenu en ajoutant à G un sommet universel s est planaire, donc 4-coloriable. Si c est une coloration de G' avec 4 couleurs, la restriction de c à \mathcal{S}_G est une coloration de G avec 3 couleurs, puisque la couleur $c(s)$ est distincte de $c(u)$ pour tout sommet u de G . G admet donc une coloration avec 3 couleurs.

4.3. Si le graphe n'admet pas de corde, tous les sommets sont de degré au plus 2. Sinon, considérons une corde de longueur minimale. En numérotant les sommets dans l'ordre trigonométrique direct de 1 jusqu'à p et en choisissant correctement le point de départ de la numérotation, nous pouvons supposer que cette corde relie le point A_1 au point A_k et est de longueur $k - 1$. Le points A_2 ne peut pas être relié :

- à un point A_i avec $k + 1 \leq i \leq p$ (car le segment $[A_2, A_i]$ coupe la corde $[A_1, A_k]$);
- à un point A_i avec $4 \leq i \leq k$ (sinon, $[A_2, A_i]$ serait une corde de longueur $i - 3 < k - 1$).

On en déduit que A_2 ne peut être relié qu'à A_1 et A_3 , et donc que A_2 est de degré au plus 2.

4.4. Montrons le résultat par récurrence sur le nombre de sommets du GPE (remarquons que l'on travaille ici sur des graphes non supposés connexes). Si le graphe est vide, le résultat est évident. Soit $p \in \mathbb{N}$ et supposons que tout GPE à p sommets est 3-coloriable. Si G est un GPE à $p + 1$ sommet, il possède un sommet s d'ordre au plus 2. Le graphe G' obtenu en supprimant s de G est un GPE à p sommet : il est donc 3-coloriable. On prolonge alors un 3-coloriage de G' en un 3-coloriage de G en donnant à s une couleur distincte de celles de ses éventuels voisins (2 couleurs au maximum sont interdites, puisque s a au plus deux voisins).

4.5. L'énoncé est maladroit, puisqu'il semble considérer des graphes non nécessairement connexes (malgré la remarque encadrée à la fin de la partie 2), puisque l'on parle "d'augmenter le nombre de composantes connexes d'une unité". Ainsi, les composantes biconnexes ne sont pas nécessairement connexes. Je pense qu'il faut plutôt comprendre qu'un graphe biconnexe doit être connexe, pour que les énoncés de la fin de la partie 4 soient cohérents. Nous modifions donc les définitions en :

- un sommet s d'un graphe connexe G est un point d'articulation si G perd sa connexité quand on supprime s ;
- un graphe est biconnexe s'il est connexe sans point d'articulation.

$G_{(i)}$ et $G_{(iii)}$ n'ont pas de point d'articulation et ils ne possèdent qu'une composante biconnexe : eux-même.

$G_{(ii)}$ est un arbre : ses points d'articulation sont les 9 sommets de degré ≥ 2 . Pour qu'un sous-graphe G de $G_{(iii)}$ soit biconnexe, il faut déjà que G soit connexe : les composantes biconnexes de $G_{(iii)}$ sont donc les sous-arbres maximaux dont tous les sommets sont de degré ≤ 1 , c'est-à-dire les sous-graphes de G réduits à deux sommets reliés par une arête. Les composantes biconnexes ne sont pas disjointes (un point commun à deux composantes biconnexes est un point d'articulation).

- 4.6. Si les sommets consécutifs sont adjacents et si s est un sommet, on peut numéroter les sommets dans l'ordre trigonométrique directe en partant de s :

$$\mathcal{S}_G = \{s = A_1, A_2, \dots, A_p\}.$$

En enlevant s , on obtient un graphe G' connexe, puisque pour i, j tels que $2 \leq i \leq j \leq p$, $(A_i, A_{i+1}, \dots, A_j)$ est un chemin de A_i à A_j dans G' . G est donc biconnexe.

S'il existe deux sommets consécutifs non adjacents, on peut numéroter les sommets dans le sens trigonométrique :

$$\mathcal{S}_G = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$$

de sorte que A_1 et A_p ne soient pas connectés. Comme le graphe est connexe, A_1 est au moins de degré 1 et on peut définir i maximal tel que A_1 et A_i soient connectés. A_i est alors un point d'articulation car A_1 et A_p ne sont plus connectés dans le graphe G' obtenu en supprimant A_i de G . En effet, s'il existait un chemin de A_1 à A_p dans G' :

$$A_1, A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n} = A_p$$

on aurait $i_1 < i < i_n$ et il existerait un indice j tel que $2 \leq i_j < i < i_{j+1}$: ainsi, les segments $[A_1, A_i]$ et $[A_{i_j}, A_{i_{j+1}}]$ seraient sécants. Nous avons donc montré qu'un GPE (connexe) est biconnexe si et seulement si les sommets consécutifs sur le cercle sont connectés.

- 4.7. Supposons que G est un GPE biconnexe, i.e. tel que les sommets consécutifs sur le cercle sont connectés. Je ne pense pas qu'il soit utile de faire la distinction proposée par l'énoncé, ni d'imposer aux gendarmes d'être placé au même sommet lors de l'initialisation. Nous supposons que les éléments A_1, A_2, \dots, A_p de \mathcal{S}_G sont numérotés de 1 dans l'ordre d'un parcours trigonométrique du cercle et on pose $A_{p+1} = A_1$. L'idée consiste à déplacer les gendarmes de telle sorte qu'après chaque déplacement des gendarmes ou du voleur, on se trouve dans une position $(A_k, A_i, A_j)^V$ ou $(A_k, A_i, A_j)^G$ vérifiant la propriété :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} 1 \leq i \leq k \leq j \leq n \\ \forall q \in \{i+1, \dots, j-1\}, \mathcal{V}^*(A_q) \subset \{A_i, A_{i+1}, \dots, A_{j-1}, A_j\} \end{cases}$$

Ainsi, le voleur sera coincé entre les deux gendarmes et il suffira de diminuer strictement $j - i$ pour arriver à sa capture. Considérons donc la stratégie suivante :

- on place initialement les deux gendarmes au point A_1 : en notant $\kappa_i = (A_1, A_{p+1})$, après le premier coup joué par le voleur, on est dans une position vérifiant (\mathcal{P}) ;
- si $(A_k, A_i, A_j)^G$ est une position vérifiant (\mathcal{P}) et non finale, on distingue deux cas :
 - si on peut atteindre A_k depuis A_i ou A_j , on déplace l'un (ou les deux gendarmes) sur A_k ;

- sinon, on note i' le plus grand indice q compris entre $i + 1$ et $j - 1$ tel qu'il y ait une arête entre A_i et A_q (i' est bien défini car il y a une arête entre A_i et A_{i+1}); de même, on note j' le plus petit indice q compris entre $i + 1$ et $j - 1$ tel qu'il y ait une arête entre A_j et A_q . Comme les arêtes ne se coupent pas, on a $i + 1 \leq i' \leq j' \leq j - 1$. Comme $k \in [i + 1, j - 1] \setminus \{i', j'\}$, on a soit $i' < k$, soit $k < j'$. On pose alors :

$$\psi(A_k, A_i, A_j)^G = (A_k, A_{i''}, A_{j''})^V$$

avec $i'' = \begin{cases} i' & \text{si } i' < k \\ i & \text{sinon} \end{cases}$ et $j'' = \begin{cases} j' & \text{si } j' > k \\ j & \text{sinon} \end{cases}$. Si a est une arête qui part d'un des sommets $A_{i''+1}, \dots, A_{j''-1}$, alors :

- comme $(A_k, A_i, A_j)^G$ vérifie la propriété (\mathcal{P}) , a ne peut pas arriver en A_1, \dots, A_{i-1} ;
- si $i'' = i'$, l'arête $[A_i A_{i'}]$ empêche a d'arriver en $A_{i+1}, \dots, A_{i'-1}$ et elle ne peut arriver en A_i par maximalité de i' .

Dans tous les cas, a ne peut pas arriver en $A_1, \dots, A_{i''-1}$.

Une preuve symétrique montre que a ne peut pas arriver en $A_{j''+1}, \dots, A_p$. On en déduit que la nouvelle position vérifie (\mathcal{P}) , ce qui sera également le cas après le coup du voleur, puisque la nouvelle position du voleur est élément de $\mathcal{V}_G^*(A_k) \subset \{A_{i''}, \dots, A_{j''}\}$.

- pour toutes les autres positions, la stratégie est définie de façon quelconque (ces autres positions ne seront jamais rencontrées dans une partie jouée selon (κ_i, ψ)).

Ainsi, quelle que soit la stratégie suivie par le voleur, les gendarmes gagnent s'ils suivent la stratégie (κ_i, ψ) , puisqu'au cours d'une partie, la quantité $j - i$ est positive et décroît strictement à chaque coup non final.

4.8. La question m'a semblé bien difficile et je remercie Marc De Falco de m'avoir donné l'idée de la preuve qui suit. Ce n'est sans doute pas celle imaginée par l'auteur du sujet, car la récurrence n'est pas faite sur le nombre de points d'articulation, mais sur la taille du graphe. On peut espérer qu'il existe une preuve plus élémentaire!

Lemme : si G est un graphe connexe non biconnexe et non réduit à un point, il existe un sommet s et une partie \mathcal{S} de \mathcal{S}_G telle que :

- \mathcal{S} est non vide et $s \notin \mathcal{S}$;
- les éléments de $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_G \setminus (\mathcal{S} \cup \{s\})$ sont déconnectés de \mathcal{S} , i.e. que les chemins dans le graphe G qui vont d'un sommet de \mathcal{S} à un sommet de \mathcal{S}' passent nécessairement par s ;
- $G_{|\mathcal{S} \cup \{s\}}$ est biconnexe;

Preuve du lemme : on commence par choisir un point d'articulation s_1 de G et on note \mathcal{S}_1 une composante connexe de $G_{|\mathcal{S}_G \setminus \{s_1\}}$. Le couple (s_1, \mathcal{S}_1) vérifient les propriétés (a) et (b); s'il vérifie (c), la preuve est terminée; sinon, on note $G_1 = G_{|\mathcal{S}_1 \cup \{s_1\}}$ et on choisit un point d'articulation s_2 de G_1 , qui est différent de s_1 car $G_{|\mathcal{S}_1}$ est connexe; le graphe obtenu en enlevant s_2 de G_1 n'est pas connexe : on peut donc choisir une de ses composantes connexes \mathcal{S}_2 qui ne contient pas s_1 . Un point de \mathcal{S}_2 ne peut être relié à un point de $(\mathcal{S}_1 \cup \{s_1\}) \setminus (\mathcal{S}_2 \cup \{s_2\})$ qu'en passant par le point s_2 ; les points de \mathcal{S}'_1 ne peuvent eux-même être reliés à un point de \mathcal{S}_2 qu'en passant par s_1 , et donc qu'en passant par s_2 (car $s_1 \in (\mathcal{S}_1 \cup \{s_1\}) \setminus (\mathcal{S}_2 \cup \{s_2\})$). On en déduit que le couple (s_2, \mathcal{S}_2) vérifie les propriétés (a) et (b). Ainsi, par itération, on poursuit la construction jusqu'à atteindre un couple (s_k, \mathcal{S}_k) vérifiant (a), (b) et (c) (les cardinaux des parties $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots$ décroissent strictement, donc le processus s'arrête, ce qui n'est possible que si $G_{|\mathcal{S}_k \cup \{s_k\}}$ est biconnexe).

Nous pouvons maintenant montrer que tout GPE connexe est dans \mathcal{C}_2 . Si G est un GPE connexe contenant 1 point, le résultat est évident. Soit $N \geq 1$ et supposons que tout GPE connexe contenant moins de N

sommets est dans \mathcal{C}_2 . Soit G un GPE connexe à $N + 1$ sommets. Si G est biconnexe, il est dans \mathcal{C}_2 d'après 4.7. Sinon, soit (s, \mathcal{S}) vérifiant (a), (b) et (c) et posons $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_G \setminus (\mathcal{S} \cup \{s\})$. Les graphes $G_1 = G_{|\mathcal{S} \cup \{s\}}$ et $G_2 = G_{|\mathcal{S}' \cup \{s\}}$ sont dans \mathcal{C}_2 (le premier est biconnexe et le second est un GPE connexe de cardinal au plus N). On peut choisir une stratégie gagnante de la forme $((s, s)^V, \psi_{G_1})$ dans G_1 (voir preuve de la question 4.7) et fixer une stratégie gagnante $((s_1, s_2)^V, \psi_{G_2})$ dans G_2 . Considérons l'application

$$f : \mathcal{S}_G \longrightarrow \mathcal{S}' \cup \{s\}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} s & \text{si } t \in \mathcal{S} \\ t & \text{sinon} \end{cases}$$

De façon informelle, la stratégie des gendarmes dans G est définie de la façon suivante :

- les gendarmes sont placés en s_1 et s_2 ;
- on commence à suivre la stratégie ψ_{G_2} en remplaçant la position v par $f(v)$; comme la stratégie $((s_1, s_2)^V, \psi_{G_2})$ est gagnante, on arrive à une position (v, g_1, g_2) telle que $f(v) = g_1$ ou $f(v) = g_2$;
- si $v = f(v)$, la partie est gagnée par les gendarmes. Sinon, $v \in \mathcal{S}$ et $g_1 = s$ ou $g_2 = s$. Si les deux gendarmes ne sont pas en s , on ramène le second gendarme en s (c'est possible car G est connexe) en laissant le premier gendarme en s (il va donc empêcher le voleur de sortir de $\mathcal{S} \cup \{s\}$) ;
- une fois que les deux gendarmes sont en s , on joue selon la stratégie ψ_{G_1} , qui va assurer la prise du voleur (cette stratégie coince le voleur entre les deux gendarmes, lui interdisant de sortir de $\mathcal{S} \cup \{s\}$).

On peut définir une application $\pi : \mathcal{S}' \longmapsto \mathcal{S}' \cup \{s\}$ telle que pour tout $t \in \mathcal{S}'$, la suite finie $t, \pi(t), \pi^2(t), \dots$ est un chemin de t à s dans G_2 . On peut maintenant définir formellement la stratégie dans le jeu G , en distinguant, pour $(v, \gamma_1, \gamma_2)^G$ position du jeu, plusieurs cas :

- si $v \in \mathcal{S}$, $g_1 = s$ et $g_2 \in \mathcal{S}'$, $\psi_G((v, s, g_2)^G) = (v, s, \pi(g_2))^V$;
- si $v \in \mathcal{S}$, $g_1 \in \mathcal{S}'$ et $g_2 = s$, $\psi_G((v, g_1, s)^G) = (v, \pi(g_1), s)^V$;
- si $g_1, g_2 \in \mathcal{S}' \cup \{s\}$ et si on n'est pas dans l'un des deux premiers cas, $\psi_G((v, g_1, g_2)^G) = (v, g'_1, g'_2)^V$ avec $\psi_{G_2}((\pi(v), g_1, g_2)^G) = (\pi(v), g'_1, g'_2)^V$;
- si $g_1, g_2, v \in \mathcal{S} \cup \{s\}$, $\psi_G((v, g_1, g_2)^G) = \psi_{G_1}((v, g_1, g_2)^G)$;
- dans tous les autres cas, on pose $\psi_G((v, g_1, g_2)^G) = (v, g_1, g_2)^V$ (ces positions seront ou bien gagnantes, ou bien jamais atteinte par une partie jouée selon la stratégie $((s_1, s_2)^V, \psi^G)$).

et on peut montrer facilement que la stratégie $((s_1, s_2)^V, \psi^G)$ est gagnante.

5 Étude du cas de plusieurs gendarmes

5.1. Soit R un ensemble dominant. Si $R = \mathcal{S}_G$, on a bien $|R| = |\mathcal{S}_G| \geq d(G)$; sinon, on choisit $u \in \mathcal{S}_G \setminus R$. On a :

$$R = (R \setminus \mathcal{V}_G(u)) \sqcup (R \cap \mathcal{V}_G(u)) \text{ et } \mathcal{V}_G(u) = (\mathcal{V}_G(u) \setminus R) \sqcup (R \cap \mathcal{V}_G(u))$$

donc

$$|R| = |R \setminus \mathcal{V}_G(u)| + |R \cap \mathcal{V}_G(u)| \geq |\mathcal{V}_G(u) \setminus R| + |R \cap \mathcal{V}_G(u)| = |\mathcal{V}_G(u)| = d(u) \geq d(G)$$

en appliquant la proposition admise (on a bien $\mathcal{V}_G(u) \subset \mathcal{V}_G^*(R) = \mathcal{S}_G$). Un ensemble dominant contient donc au moins $d(G)$ sommets.

5.2. Si $\mathcal{V}_G(v) \subset \mathcal{V}_G^*(R)$, on peut reprendre le calcul précédent et obtenir $|R| \geq d(v) \geq d(G)$, qui est absurde. On en déduit que $\mathcal{V}_G(v) \not\subset \mathcal{V}_G^*(R)$: il existe ainsi $v' \in \mathcal{V}_G(v) \setminus \mathcal{V}_G^*(R)$ et on a bien $v' \in \mathcal{V}_G^*(v)$ et $v' \notin \mathcal{V}_G^*(R)$.

5.3. D'après la question 5.1, il existe une fonction f qui, à une partie R de \mathcal{S}_G de cardinal strictement inférieur à $d(G)$, associe $f(R) \in \mathcal{S}_G \setminus \mathcal{V}_G^*(R)$.

D'après la question 5.2, il existe une fonction g qui, à un sommet $v \in \mathcal{S}_G$ et à une partie R de \mathcal{S}_G de cardinal strictement inférieur à $d(G)$, associe $v' = g(v, R)$ avec $v' \in \mathcal{V}_G^*(v) \setminus \mathcal{V}_G^*(R)$ si $v \notin R$ (aucune condition n'est imposée sur $g(v, R)$ si $v \in R$).

Si k est un entier tel que $1 \leq k < d(G)$, la stratégie φ définie par :

$$\begin{aligned} \forall \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathcal{S}_G, \varphi((\gamma_1, \dots, \gamma_k)^V) &= (f(\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}), \gamma_1, \dots, \gamma_k)^G \\ \forall v, \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathcal{S}_G, \varphi((v, \gamma_1, \dots, \gamma_k)^V) &= (g(v, \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}), \gamma_1, \dots, \gamma_k)^G \end{aligned}$$

est gagnante :

- à son premier coup, le voleur se place en un sommet hors d'atteinte des gendarmes puisque $f(\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\})$ n'est pas élément de $\mathcal{V}_G^*(\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\})$;
- si, à une certaine étape du jeu, nous arrivons à $(v, \gamma_1, \dots, \gamma_k)^G$ avec $v \notin \mathcal{V}_G^*(\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\})$, alors quelle que soit la stratégie suivie par les gendarmes, la position suivante $(v, \gamma'_1, \dots, \gamma'_k)^G$ n'est pas une position de capture ($v \notin \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_k\} \subset \mathcal{V}_G^*(\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\})$). La stratégie φ conduit à la position $(v', \gamma'_1, \dots, \gamma'_k)^V$ avec $v' \notin \mathcal{V}_G^*(\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_k\})$.

Ainsi, le voleur n'est jamais capturé par les gendarmes et $\text{copnumber}(G) \geq d(G)$.

Remarques : l'énoncé aurait pu, dans sa définition axiomatique du plan projectif, dire que le plan était l'ensemble des points et qu'une droite était une partie du plan. On construit le plan projectif canonique $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sur un corps commutatif \mathbb{K} en quotientant $\mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence de colinéarité :

$$\forall u, v \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}, u \sim v \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, v = \lambda u.$$

Pour $u \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$, on note $p(u)$ la classe d'équivalence de u pour \sim . Les éléments de $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sont appelés des points et les droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sont les images par p des parties $P \setminus \{0\}$ où P est un plan vectoriel de \mathbb{K}^3 . On montre facilement que cette structure vérifie les axiomes (P_1) , (P_2) et (P_3) . Si \mathbb{K} est fini de cardinal q , on montre facilement que $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ vérifie les conclusion du théorème A, avec $q = |\mathbb{K}|$. Le théorème B est donc démontré ... si on sait démontrer qu'il existe un corps commutatif de cardinal p^n pour tout nombre premier p et pour tout entier $n \geq 1$.

5.4. Il faut comprendre que $P = \{A, B, C, A', B', C', O\}$ et que les droites sont les parties $\{A, B', C\}$, $\{B, C', A\}$, $\{C, A', B\}$, $\{A, O, A'\}$, $\{B, O, B'\}$, $\{C, O, C'\}$, $\{A', B', C'\}$. En posant $q = 2$, on a bien $q^2 + q + 1$ points, $q^2 + q + 1$ droites et chaque droite contient $q + 1$ points. Le plan de Fano est d'ordre 2. On peut remarquer que ce plan est isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, avec par exemple l'identification :

$$A = p(1, 0, 0), B = p(0, 1, 0), C = p(0, 0, 1), A' = p(0, 1, 1), B' = p(1, 0, 1), C' = p(1, 1, 0) \text{ et } O = p(1, 1, 1).$$

Comme les classes d'équivalence sont des singletons, on peut aussi dire :

$$A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1), A' = (0, 1, 1), B' = (1, 0, 1), C' = (1, 1, 0) \text{ et } O = (1, 1, 1)$$

et représenter le plan comme formé par 7 des sommets d'un cube, les droites correspondant aux intersections avec les plans "usuels" passant par le huitième sommet.

5.5. Soit $q = p^n$ avec p premier et $n \in \mathbb{N}^*$. On sait qu'il existe un plan projectif P d'ordre q . Notons D l'ensemble des droites de P . On définit le graphe G par :

- $\mathcal{S}_G = P \sqcup D$;
- $\mathcal{A}_G = \{\{M, \Delta\}, M \in P, \Delta \in D, M \in \Delta\}$.

Chaque point de P appartient à $q+1$ droites (propriété (iv)) et chaque droite contient $q+1$ points (propriété (iii)), donc G est $(q+1)$ -régulier. Comme G est biparti, il est sans 3-cycle; la propriété (P1) interdit les 4-cycles (sinon, il existerait deux points A_1 et A_2 et deux droites Δ_1 et Δ_2 telles que $\{A_1, \Delta_1\}$, $\{\Delta_1, A_2\}$, $\{A_2, \Delta_2\}$ et $\{\Delta_2, A_1\}$ soient des arêtes distinctes du graphe, ce qui donnerait deux droites distinctes incidentes aux deux points distincts A_1 et A_2). D'après la question 5.3, le copnumber de ce graphe est supérieur ou égal à $d(G) = q+1$. Comme q est arbitrairement grand, il existe bien des graphes dont le copnumber est arbitrairement grand.

Remarque : on peut se contenter de travailler sur des corps de cardinal p premier, dont l'existence est bien connue ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps quand p est premier). Cette preuve ne nécessite "que" les résultats de géométrie projective et pas de résultats hors programme de théorie des corps.

- 5.6. Soit C un cycle du graphe C_5 . En notant A_1 et A_2 les deux premiers sommets du cycle, A_2 est un voisin de A_1 et on peut noter les sommets du graphe A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 en poursuivant le parcours du cercle dans le même sens. Comme les arêtes de C sont deux à deux distinctes, l'arête suivante est $\{A_2, A_3\}$, qui ne peut être suivie que de $\{A_3, A_4\}$, puis de $\{A_4, A_5\}$ et enfin de $\{A_5, A_1\}$. Les cycles de C_5 sont donc tous de longueur 5 : C_5 n'a ni 3-cycle, ni 4-cycle et est clairement 2-régulier. Enfin, on obtient un 3-coloriage en posant $c(A_1) = 0$, $c(A_2) = 1$, $c(A_3) = 0$, $c(A_4) = 1$ et $c(A_5) = 2$.
- 5.7. Ce graphe est formé à partir de quatre copies G_1, G_2, G_3, G_4 disjointes de C_5 , dans lesquelles on a effectué des permutations des couleurs. Chaque sommet d'une copie est ensuite relié par une "arête extérieure" à une autre copie, en respectant une règle de couleur : tous les sommets d'une couleur fixée c_1 d'une copie G_i sont reliés à tous les sommets de la même couleur c_2 d'une copie G_j (avec $j \neq i$ et $c_2 \neq c_1$). Ainsi, la coloration du graphe est correcte et il n'existe pas de 3-cycle ni de 4-cycle. En effet, comme les G_i n'en possèdent pas, un 3-cycle ou un 4-cycle devrait contenir au moins une arête extérieure; comme les arêtes doivent être distinctes, chaque arête extérieure est suivie et précédée d'une arête intérieure. Ainsi, un cycle contient une séquence de la forme (A, B, C, D) avec $A, B \in G_i$ et $C, D \in G_j$ où $i \neq j$. A et D sont dans des copies différentes, donc il n'existe pas de 3-cycle; enfin, on ne peut pas relier D à A car C et D ont des couleurs différentes : l'arête extérieure qui part de C n'arrive pas dans la même copie de C_5 que l'arête extérieure qui part de D .
- 5.8. Pour $n = 0, 1, 2$, il existe un graphe n -régulier 3 coloriable sans 3-cycle ni 4-cycle (le graphe réduit à un sommet, le graphe réduit à une arête, le graphe C_5). Supposons que $n \geq 2$ et qu'il existe un graphe G n -régulier 3-coloriable sans 3-cycle ni 4-cycle. Considérons une 3-coloration c de G et notons $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ la partition de \mathcal{S}_G en les différentes couleurs. On construit 4 copies de G :

- pour tout $m \in \{0, 1, 2, 3\}$, $G_m = (\mathcal{S}_m, \mathcal{A}_m)$ avec :

$$\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_G \times \{m\} \text{ et } \mathcal{A}_m = \{\{(A, m), (B, m)\}, A, B \in \mathcal{S}_G \text{ t.q. } \{A, B\} \in \mathcal{A}_G\};$$

- le tableau suivant donne la couleur d'un point qui se trouve dans $\mathcal{S}_c \times \{m\}$:

	$c = 0$	$c = 1$	$c = 2$
$m = 0$	0	1	2
$m = 1$	0	2	1
$m = 2$	1	0	2
$m = 3$	2	1	3

Cette définition est calquée sur les couleurs définies pour le graphe de la figure 7 (G_0 reprend les couleurs de G puis on colore les trois autres copies en permutant deux couleurs). Dans l'exemple, le graphe G_0 est au centre de la figure, G_1 en haut à gauche, G_2 en haut à droite et G_3 en bas.

On définit les arêtes extérieures :

$$\mathcal{A}_{ext} = \bigcup_{(i,j,c) \in \Lambda} \left\{ \{(A,i), (A,j)\}, A \in \mathcal{S}_c \right\}$$

avec $\Lambda = \{(0, 1, 1), (0, 2, 0), (0, 3, 2), (1, 2, 2), (1, 3, 0), (2, 3, 1)\}$. Pour un de ces triplets (i, j, c) , on ajoute des arêtes extérieures qui relient les points de \mathcal{S}_i et \mathcal{S}_j qui correspondent aux points de couleur c dans le graphe initial (dans l'exemple de la figure 7, les points de la copie en haut à droite (i.e. de \mathcal{S}_2) qui avait initialement la couleur 1 sont reliés aux points qui leur correspondent dans la copie du bas (i.e. dans \mathcal{S}_3) : c'est pour cela que Λ contient $(2, 3, 1)$).

On définit enfin le graphe G' :

$$\mathcal{S}_{G'} = \mathcal{S}_G \times \{0, 1, 2, 3\}, \quad \mathcal{A}_{G'} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_{ext}$$

et les choix des couleurs assurent que le graphe est bien coloré (il suffit de traiter tous les cas : par exemple, avec $(i, j, c) = (1, 2, 2)$, si $A \in \mathcal{S}_2$, $(A, 1)$ est de couleur 1 et $(A, 2)$ est de couleur 2, donc l'arête extérieure $\{(A, 1), (A, 2)\}$ respecte la coloration). Comme on a ajouté une arête partant de chaque sommet, on a bien un graphe $(n + 1)$ -régulier et il est sans 3-cycle ni 4-cycle en reprenant exactement la même preuve qu'à la question précédente.

Par récurrence, nous avons démontré qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un graphe n -régulier 3-colorable sans 3-cycle ni 4-cycle ; d'après la question 5.3, le copnumber d'un tel graphe est supérieur à n (qui est le degré du graphe) : il existe donc des graphes dont le copnumber est arbitrairement grand.