Variations autour du pivot de Gauss

D'après un TP de Stéphane Gonnord

Buts du TP

- Mettre en place l'algorithme complet de résolution d'un système linéaire par pivot de Gauss.
- Observer les limitations de cet algorithme dans le monde numérique.
- Mettre en place des algorithmes utilisant le même principe de pivot.

L'objectif principal est que tout le monde ait codé l'algorithme du pivot. La deuxième partie est ici à titre de compléments, pour ceux qui veulent approfondir. Dans le cadre de ce TP on se placera toujours dans le cas de résolution d'un système de Cramer : système linéaire de n équations à p inconnues qui comporte une unique solution (la matrice carré du système est inversible).

EXERCICE 1 *Copier le répertoire* `TP11-Gauss` *contenu dans le répertoire* `Donnees` *de la classe et le coller dans son répertoire personnel. Le fichier* `cadeau.py` *contient une fonction de copie de matrice, une fonction pour générer une matrice carrée identité et quelques compléments sur les expressions booléennes et leur interêt pour construire des matrices comme la matrice identité ou la matrice de Virginie (voir exo 14).*

Lancer Spyder, créer puis sauvegarder immédiatement au bon endroit le fichier `TP11.py`.

EXERCICE 2 *Résoudre à la main les systèmes suivants :*

$$\begin{cases} 2x+3y &= 5 \\ 5x-2y &= -16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+2y-3z &= 2 \\ y-6z &= -3 \\ z &= 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+2y-3z &= 2 \\ -2x-y-3z &= -5 \\ 6x+4y+4z &= 16 \end{cases}$$

1 Résolution d'un système

Pour résoudre le système $Ax = y$, on commence par mettre le système sous forme triangulaire :

pour i *de* 0 *à* $n-2$ **faire**
  Trouver j entre i et $n-1$ tel que $|a_{j,i}|$ soit maximale. # «pivot partiel»
  # pour l'algorithme de base, on se contente de trouver un terme non nul.
  Échanger L_i et L_j (coefficients de la matrice **et** membres de droite).
  pour k *de* $i+1$ *à* $n-1$ **faire**
    $L_k \leftarrow L_k - \dfrac{a_{k,i}}{a_{i,i}} L_i$ # mettre à zéro les coefficients en position (k,i)

Arrivé ici, le système est sous forme triangulaire et il n'y a plus qu'à « remonter », via des substitutions. Le résultat est mis dans une liste/tableau x, et il s'agit donc de calculer :

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n-1} a_{i,k} x_k \right).$$

EXERCICE 3 *Si vous n'aviez pas fait comme ça, reprenez les exemples de l'exercice 2 en utilisant le pivot de Gauss !* Inutile de prendre un pivot de valeur absolue maximale : prenez-le simplement non nul !

EXERCICE 4 *Sans aller voir son cours, écrire une fonction d'échange de ligne dans une matrice, et une fonction de tranvection.* Attention, ces fonctions ne renvoient rien : elles modifient en place les matrices données en argument.


```
def echange_ligne(A, i, j):
    ...
def transvection(A, i, j, mu): # Li <- Li + mu.Lj
    ...
>>> A = [[4, 5, 6], [1, 2, 3]]
>>> echange_ligne(A, 0, 1)
>>> A
[[1, 2, 3], [4, 5, 6]]
>>> transvection(A, 1, 0, -4)
>>> A
[[1, 2, 3], [0, -3, -6]]
```

EXERCICE 5 *Écrire une fonction chargée de la recherche du pivot de module maximal dans une matrice sur une colonne (disons j_0) à partir de la ligne j_0 : il s'agit de renvoyer le (un) $i \geqslant j_0$ tel que $|A_{i,j_0}|$ est maximal.*

```
def pivot_partiel(A, j0):
   ...
   return i
>>> A = [[1, 2, 3, 4], [0, 1, 3, 5], [0, -4, 1, 0], [0, 3, 0, 0]]
>>> pivot_partiel(A, 1)
2
```

EXERCICE 6 *Toujours sans regarder son cours, écrire une fonction réalisant la résolution d'un système linéaire par pivot de Gauss (en supposant ledit système de Cramer ; si cette hypothèse n'est pas vérifiée, aucun comportement n'est spécifié). On travaillera sur des copies de la matrice* `A` *et des ordonnées* `y0`*. une fonction de copie de matrice se trouve dans le fichier* `cadeau.py`.

```
def resolution_systeme(A0, y0):
    A = copie_matrice(A0) # pour ne pas modifier la matrice donnée en paramètre.
    y0 = y[:]
    ...
    return x
```

EXERCICE 7 *Tester le programme sur les exemples de l'exercice 2*

```
>>> resolution_systeme([[2, 3],[5,-2]],[5, -16])
[-2.0, 3.0]
```

EXERCICE 8 *Comparer les résultats avec ceux obtenus à l'aide de la fonction* `solve` *de la librairie* `numpy.linalg`

EXERCICE 9 *Résoudre les systèmes suivants de trois façons (avec votre fonction de résolution, à la main, et avec* `numpy.linalg.solve`*), puis commenter :*

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 2x+4y &= 1 \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} x+2y &= 1 \\ 2x+4y &= 2 \end{cases}$$

EXERCICE 10 *Résoudre (de trois façons...) les systèmes suivants, puis commenter :*

$$\begin{cases} x+1/4y+z &= 0 \\ x+1/3y+2z &= 0 \\ y+12z &= 1 \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} x+10^{15}y+z &= 1 \\ x+10^{-2}y+2z &= 0 \\ 10^{15}y-z &= 0 \end{cases}$$

2 Inversion d'une matrice

L'algorithme du pivot nous a amené à faire des opérations sur les lignes d'une matrice, ce qui revient à la multiplier à gauche par des matrices élémentaires, disons $L_1, ..., L_N$ (après N opérations).

Le système $AX = Y$ est alors équivalent à $L_1AX = L_1Y$ puis $L_2L_1AX = L_2L_1Y$, puis $L_N...L_1AX = L_N...L_1Y$, et si on a correctement appliqué l'algorithme du pivot [1], le membre de gauche vaut exactement X. Ainsi : $A^{-1} = L_N...L_1$. Cette matrice est en fait exactement celle obtenue en appliquant à la matrice identité (et dans le même ordre) les opérations réalisées sur A.

EXERCICE 11 *Mettre en œuvre cette idée pour calculer l'inverse d'une matrice : expliciter l'algorithme suggéré dans les lignes précédentes. Écrire le programme Python correspondant à l'algorithme.*

```
def inversion(A0):
    A = copie_matrice(A0) # pour ne pas modifier la matrice donnée en paramètre.
    ...
    return A
```

Vérifier :

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&2&-3\\0&1&-6\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&-\frac{9}{2}\\0&1&6\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&2&-3\\-2&-1&-3\\6&4&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4&-10&-4,5\\-15&13&-6\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

EXERCICE 12 *Déterminer l'inverse des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1/4&1\\1&1/3&2\\0&1&12\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1+10^5&1\\1&1+10^{-5}&2\\0&10^5&-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&10^{15}&1\\1&10^{-2}&2\\0&10^{15}&-1\end{pmatrix}$$

EXERCICE 13 *Sur les exemples précédents, comparer le résultat obtenu avec celui fourni par la fonction* `inv` *de la bibliothèque* `numpy.linalg`.

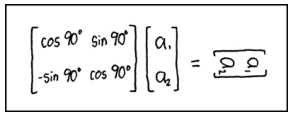
EXERCICE 14 *La matrice de Virginie d'ordre n est la matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :*

$$V=\begin{pmatrix}2&-1&&&(0)\\-1&2&-1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&-1&2&-1\\(0)&&&-1&2\end{pmatrix}$$

1. *Inverser V_2 et V_3.*
2. *Évaluer le temps de calcul nécessaire pour inverser V lorsque $n \in \{50, 100, 200, 400\}$. Comparer avec les temps équivalents nécessaires à* `numpy.linalg.inv`.

```
import time

t0 = time.time()
... [mon calcul] ...
t1 = time.time()  # t1-t0 est le temps (en secondes) du calcul
```



1. ce qui inclut la remontée : les substitutions correspondent à des transvections $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_k$, et on termine avec des dilatations $L_i \leftarrow \frac{1}{a_{i,i}} L_i$

Corrigé du TP 11 Pivot de Gauss

Chenevois-Jouhet-Junier

1 Exercices 1,2 et 3:

Voici les résolutions des systèmes 1, 2 et 3 avec le module de calcul formel sympy (il est intégré dans Pyzo). Attention, lancer la commande `x, y, z, t = sympy.symbols('x y z t')` avant chaque résolution de système avec `sympy` car les noms `x y  z t` seront écrasés entre temps par les fonctions de résolution de système linéaire que vous allez écrire.

```
import sympy
x, y, z, t = sympy.symbols('x y z t')
```

- Résolution du système 1

```
In [14]: sympy.solve([2*x + 3*y - 5, 5*x-2*y + 16], [x, y])
Out [14]: {y: 3, x: -2}
```

- Résolution du système 2

```
In [15]: sympy.solve([2*x + 2*y  -3*z - 2, y - 6*z + 3, z -4 ], [x, y, z])
Out [15]: {z: 4, y: 21, x: -14}
```

- Résolution du système 3

```
In [16]: sympy.solve([2*x + 2*y - 3*z - 2, -2*x - 3*z + 5, 6*x + 4*y + 4*z - 16], [x, y, z])
Out [16]: {z: 1, y: 3/2, x: 1}
```

2 Exercice 4

```
def echange_ligne(A, i, j):
    """Il suffit d'échanger les pointeurs"""
    A[i], A[j] = A[j], A[i]

def echange_ligne2(A, i, j):
    """Pour garder les memes pointeurs et copier les elements"""
    for k in range(len(A[i])):
        A[i][k], A[j][k] = A[j][k], A[i][k]

def transvection(A, i, j, mu):
    """Transvection Li <- Li + mu*Lj"""
```

```
    for k in range(len(A[i])):
        A[i][k] += mu*A[j][k]

"""
>>> A = [[4, 5, 6], [1, 2, 3]]
>>> echange_ligne(A, 0, 1)
>>> A
[[1, 2, 3], [4, 5, 6]]
>>> transvection(A, 1, 0, -4)
>>> A
[[1, 2, 3], [0, -3, -6]]
"""
```

3 Exercice 5

```
def pivot_partiel(A, j0):
    """Recherche du pivot de module maximal dans la colonne j0 de
    la matrice A, parmi les lignes d'index >= j0"""
    i = j0 #ligne du maximum provisoire
    modulepivot = abs(A[i][j0])
    for k in range(j0+1, len(A)):
        if abs(A[k][j0]) > modulepivot:
            i, modulepivot = k, abs(A[k][j0])
    return i

"""
>>> A = [[1, 2, 3, 4], [0, 1, 3, 5], [0, -4, 1, 0], [0, 3, 0, 0]]
>>> pivot_partiel(A, 1)
2
"""
```

4 Exercice 6

```
def copie(m):
    """retourne une copie de la matrice m"""
    nlines,ncols = len(m),len(m[0])
    cp = [[0]*ncols for _ in range(nlines)]
    for i in range(nlines):
        for j in range(ncols):
            cp[i][j]=m[i][j]
    return  cp

def resolution_systeme(A0, y0, verbose=False):
    """Resolution d'un systeme de Cramer par la methode du pivot
    de Gauss. Si le booleen verbose vaut True, les etapes intermediaires
    de la mise sous forme triangulaire sont affichees"""
    A = copie(A0) #copie de A
    y = copie(y0) #copie de y
    n = len(A) #nombre de lignes
```



```
    if verbose: #affichage facultatif des etapes
            print('Matrice=', A)
            print('Ordonnees =',y, end='\n\n')
    #phase de mise sous forme triangulaire
    for i in range(n-1):
        #recherche du pivot partiel dans la colonne i
        j = pivot_partiel(A, i)
        #echange de la ligne i  de A et de celle du pivot partiel
        if i != j:
            echange_ligne(A, i, j)
            #idem pour les inconnues
            echange_ligne(y, i, j)
        #transvections dans la colonne i pour mettre des zeros
        pivot = A[i][i]
        for k in range(i+1, n):
            #ATTENTION à bien stocker le coefficient de transvection
            mu = -A[k][i]/float(pivot)
            transvection(A, k, i, mu)
            #si on utilise -A[k][i]/float(pivot) au lieu de mu
            #c'est faux car A[k][i] a été modifié
            transvection(y, k, i, mu)
        if verbose: #affichage facultatif des etapes
            print('Etape %d :'%(i+1), 'pivot = %.3f'%pivot)
            print('Matrice=', A)
            print('Ordonnees =', y, end='\n\n')
    x = [[0] for i in range(n)]
    #phase de remontée
    for i in range(n-1, -1, -1):
        x[i] = [1/float(A[i][i])*(y[i][0] - sum(A[i][k]*x[k][0] for k in range(i+1, n)))]
    return x

"""
In [10]: resolution_systeme([[2, 3], [5, -2]], [[5], [-16]])
Out[10]: [[-2.0], [3.0]]
"""
```

5 Exercice 7

Test de la fonction de résolution maison sur les systemes de l'exercice 2

```
"""
#systeme 1
In [10]: resolution_systeme([[2, 3], [5, -2]], [[5], [-16]])
Out[10]: [[-2.0], [3.0]]

#systeme 2
In [11]: resolution_systeme([[2, 2, -3],[0, 1, -6], [0, 0, 1]],[[2], [-3], [4]])
Out[11]: [[-14.0], [21.0], [4.0]]

#systeme 3
```

```
In [12]: resolution_systeme([[2,2,-3],[-2,-1,-3 ],[6,4,4]],[[2],[-5], [16]], verbose=True)
Matrice= [[2, 2, -3], [-2, -1, -3], [6, 4, 4]]
Ordonnees = [[2], [-5], [16]]

Etape 1 : pivot = 6.000
Matrice= [[6, 4, 4], [0.0, 0.33333333333333326, -1.6666666666666667],
[0.0, 0.6666666666666667, -4.333333333333333]]
Ordonnees = [[16], [0.33333333333333304], [-3.333333333333333]]

Etape 2 : pivot = 0.667
Matrice= [[6, 4, 4], [0.0, 0.6666666666666667, -4.333333333333333], [0.0, 0.0, 0.49999999999999989]]
Ordonnees = [[16], [-3.333333333333333], [1.9999999999999991]]

Out[12]: [[-14.000000000000036], [21.000000000000046], [4.000000000000007]]
"""
```

6 Exercice 8 Comparaison de la fonction de résolution maison et de `numpy.linalg.solve`

```
import numpy as np

"""
>>> import numpy as np
>>> help(np.linalg.solve) #pour obtenir la documentation de cette fonction
...
"""
```

- Résolution du système 1

```
In [10]: np.linalg.solve([[2, 3],[5,-2]],[[5], [-16]])

Out[10]: array([[-2.],[ 3.]])
```

- Résolution du système 2

```
In [11]: np.linalg.solve([[2, 2, -3],[0, 1, -6], [0, 0, 1]],[[2], [-3], [4]])

Out[11]: array([[-14.],[ 21.],[  4.]])
```

- Résolution du système 3

```
In [12]: x = np.linalg.solve([[2,2,-3],[-2,-1,-3 ],[6,4,4]],[[2],[-5], [16]])

In [13]: x

Out[13]: array([[-14.], [ 21.], [ 4.]])

In [14]: x[0][0]

Out[14]: -14.000000000000023
```


La précision avec les fonctions de `numpy` n'est pas meilleure que celle obtenue avec la fonction `resolution_systeme` maison. Les flottants du vecteur solution sont d'un type spécifique à `numpy`.

```
"""
In [15]: type(x[0])
Out[15]: numpy.float64
"""
```

7 Exercice 9 Tests avec des systèmes qui ne sont pas de Cramer

- Le systeme $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$ n'a pas de solutions

```
"""
In [23]: sympy.solve([x+2*y-1, 2*x + 4*y - 1], [x, y])
Out[23]: []

In [24]: resolution_systeme([[1, 2], [2, 4]], [[1], [1]])
---------------------------------------------------------------------------
ZeroDivisionError                         Traceback (most recent call last)
/home/fjunier/InfoPCSI/843/TP843/11-gauss/2015-2016/corrige-tp11-gauss-2015-2016.py in <module>()
----> 1 resolution_systeme([[1, 2], [2, 4]], [[1], [1]])

    143     #phase de remontée
    144     for i in range(n-1, -1, -1):
--> 145         x[i] = [1/float(A[i][i])*(y[i][0] - sum(A[i][k]*x[k][0] for k in range(i+1, n)))]
    146     return x

ZeroDivisionError: float division by zero

In [25]: np.linalg.solve([[1, 2], [2, 4]], [[1], [1]])
---------------------------------------------------------------------------
Traceback (most recent call last):
  ......
    raise LinAlgError("Singular matrix")
numpy.linalg.linalg.LinAlgError: Singular matrix
"""
```

Le systeme $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ a une infinité de couples solutions de la forme $(1-2y, y)$.

```
"""
In [26]: sympy.solve([x+2*y-1, 2*x + 4*y - 2], [x, y])
Out[26]: {x: -2*y + 1}

In [27]: resolution_systeme([[1, 2], [2, 4]], [[1], [2]])
---------------------------------------------------------------------------
ZeroDivisionError: float division by zerox

In [28]: np.linalg.solve([[1, 2], [2, 4]], [[1], [2]])
```

```
LinAlgError: Singular matrix
"""
```

8 Exercice 10 Problemes posés par les flottants

- Premier systeme `A1.X = Y1`

```
A1 = [[1, 1/4., 1], [1, 1/3., 2], [0, 1, 12]]
Y1 = [[0], [0], [1]]

"""
In [33]: sympy.solve([x+y, x/4 + y/3 + z, x + 2*y + 12*z - 1], [x, y, z])
Out[33]: []


In [32]: resolution_systeme(A1 ,Y1, verbose=True)
Matrice= [[1, 0.25, 1], [1, 0.3333333333333333, 2], [0, 1, 12]]
Ordonnees = [[0], [0], [1]]

Etape 1 : pivot = 1.000
Matrice= [[1, 0.25, 1], [0.0, 0.08333333333333331, 1.0], [0.0, 1.0, 12.0]]
Ordonnees = [[0], [0.0], [1.0]]

Etape 2 : pivot = 1.000
Matrice= [[1, 0.25, 1], [0.0, 1.0, 12.0], [0.0, 0.0, 2.220446049250313e-16]]
Ordonnees = [[0], [1.0], [-0.08333333333333331]]

Out[32]: [[-750599937895082.8], [4503599627370496.0], [-375299968947541.25]]
"""
```

Le premier système n'a pas de solution (comme on peut le vérifier avec `sympy.solve`).

Et pourtant la fonction de resolution maison retourne un triplet solution : `[-750599937895082.8, 4503599627370496.0, -375299968947541.25]`.

L'erreur se produit lors de la dernière étape de mise sous forme triangulaire : `2.220446049250313e-16` apparait en `Matrice[2][2]` alors qu'on devrait avoir 0 et donc une équation d'incompatibilité $0 = 1$ pour la derniere ligne du système.

L'erreur est due à la representation approchée sous forme de flottant de $1/3$ par $0.333\ldots$ puis de $1/3 - 1/4 = 1/12$ par $0.08333333\ldots$ Le coefficient de la derniere ligne devrait être $1 - 1/12 \times 12 = 0$, mais c'est $1 - (1/3. - 1/4.) \times 12$ or en representation flottante on a :

```
"""
In [34]: 1- (1/3. - 1/4.)*12
Out[34]: 2.220446049250313e-16
"""
```

Ainsi les calculs approchés avec des flottants font apparaitre des termes infinitésimaux très petits à la place de zero et transforment en systemes de Cramer des systemes qui n'ont pas cette propriété.

De plus si un de ces infinitésimaux est pris comme pivot, alors des termes tres grands (et faux) apparaissent, comme avec la fonction de bibliotheque de `numpy` :


```
"""
In [35]: np.linalg.solve(A1, Y1)
Out[35]:
array([[ -7.50599938e+14],[  4.50359963e+15],[ -3.75299969e+14]])
"""
```

- Deuxieme systeme `A2.X = Y2`

```
A2 = [[1, 10**15, 1], [1, 10**(-2), 2], [0, 10**15, -1]]
Y2 = [[1], [0], [0]]

"""
In [38]: sympy.solve([x + y - 1, 10**15*x + sympy.Rational(1, 10**2)*y + 10**15*z, x + 2*y - z], [x, y
Out[38]: {y: -200000000000000000, x: 200000000000000001, z: -199999999999999999}

In [39]: resolution_systeme(A2 ,Y2, verbose=True)
Matrice= [[1, 1000000000000000, 1], [1, 0.01, 2], [0, 1000000000000000, -1]]
Ordonnees = [[1], [0], [0]]

Etape 1 : pivot = 1.000
Matrice= [[1, 1000000000000000, 1], [0.0, -1000000000000000.0, 1.0], [0.0, 1000000000000000.0, -1.0]]
Ordonnees = [[1], [-1.0], [0.0]]

Etape 2 : pivot = -1000000000000000.000
Matrice= [[1, 1000000000000000, 1], [0.0, -1000000000000000.0, 1.0], [0.0, 0.0, 0.0]]
Ordonnees = [[1], [-1.0], [-1.0]]

---------------------------------------------------------------------------
    143     #phase de remontée
    144     for i in range(n-1, -1, -1):
--> 145         x[i] = [1/float(A[i][i])*(y[i][0] - sum(A[i][k]*x[k][0] for k in range(i+1, n)))]
    146     return x
    147

ZeroDivisionError: float division by zero
"""
```

Dans ce cas, les erreurs d'approximation par des flottants enlevent la propriete de Cramer au systeme alors que ce systeme est de Cramer et a pour unique solution `[1 + 2*10**17, -2*10**17, -2*10**17 + 1]`, comme on peut le vérifier avec `sympy.solve`.

L'erreur de division par 0 s'est produite lors de la premiere etape de la phase de remontee puisque le systeme n'est plus de Cramer.

L'erreur d'approximation s'est produite lors de la premiere etape de la mise sous forme triangulaire au cours de la transvection qui a transforme la deuxieme ligne en :

```
[0.0, -1000000000000000.0, 1.0]
```

au lieu de `[0.0, -999999999999999.99, 1.0]`

En effet Python calcule ainsi :

```
"""
In [44]: 10**-2-10**15
```

```
Out[44]: -1000000000000000.0 #-> c'est faux phenomene d'absorption
"""
```

Ainsi la deuxième et la troisième ligne de la matrice sont devenues proportionnelles alors que les ordonnées ne le sont pas et le système obtenu par équivalence n'est plus de Cramer.

La fonction de bibliothèque de numpy ne fait pas mieux :

```
"""
In [45]: np.linalg.solve(A2, Y2)
---------------------------------------------------------------------------
...
LinAlgError: Singular matrix
"""
```

9 Exercice 11 Inversion de matrice

On utilise la *méthode du miroir*.

- On applique la phase de mise sous forme triangulaire puis de remontée, en parallèle à la matrice de coefficients `A` et à la matrice identité.
- On part de A.X=Y Lors la phase de mise sous forme triangulaire on multiplie à gauche A par des matrices élémentaires d'opérations sur les lignes : triangulaires inférieures (transvection) ou matrices de permutation (echange de ligne) et on obtient :

  `L(1)..L(N).A.X=L(1)..L(N).Y .`
- Lors la phase de remontee on multplie à gauche par des matrices de transvection (triangulaires supérieures) ou de dilatation (notées S, elles permutent avec les autres car elles sont diagonales) et on a :

  `S(1)...S(M).L(1)...L(P).A.X = S(1)...S(M).L(1)...L(P).Y`

  où le membre de gauche vaut exactement X et donc `S(1)...S(M)L(1)...L(P)` produit de toutes les matrices élémentaires d'opérations sur les lignes est l'inverse de A.
- Pour obtenir cette matrice inverse, il suffit d'appliquer les memes opérations élémentaires sur les lignes à partir de la matrice identite :

  `inv(A).I= inv(A)`

```
def identite1(n):
    """Retourne une matrice carree identite de dimensions n*n"""
    return [[0]*i + [1] + [0]*(n - i -1 ) for i in range(n)]

def dilatation(A, i, mu):
    """Li <- Li*mu si mu non nul"""
    assert mu != 0
    #A[i] = [A[i][k]*mu for k in range(len(A[i]))]
    for k in range(len(A[i])):
        A[i][k] *= mu

def inversion(A0):
    """Inversion de la matrice A0 par la methode du miroir"""
    A = copie(A0) #copie de A
    n = len(A) #nombre de lignes
    I = identite1(n)
    for i in range(n-1):
        #recherche du pivot partiel dans la colonne i
        j = pivot_partiel(A, i)
        #echange de la ligne i  de A et de celle du pivot partiel
        if i != j:
            echange_ligne(A, i, j)
            echange_ligne(I, i, j)
        #transvections dans la colonne i pour mettre des zeros
        pivot = A[i][i]
        for k in range(i+1, n):
            mu = -A[k][i]/float(pivot)
            transvection(A, k, i, mu)
            transvection(I, k, i, mu)
    #phase de remontée
    for i in range(n-1, -1, -1):
        #transvections
        for k in range(i+1, n):
            mu = -A[i][k]
            transvection(I, i, k, mu)
        #dilatation
        #x[i] = 1/float(A[i][i])
        dilatation(I, i, 1/float(A[i][i]))
    return I

"""
>>> inversion([[1,2],[0,3]])
[[1.0, -0.6666666666666666], [0.0, 0.3333333333333333]]
>>> inversion([[1,2],[3,5]])
[[-4.999999999999997, 1.9999999999999993], [2.9999999999999987, -0.9999999999999996]]
>>> inversion([[1,2],[3,4]])
[[-1.9999999999999996, 0.9999999999999998], [1.4999999999999998, -0.4999999999999999]]
>>> inversion([[2,2,-3],[0,1,-6],[0,0,1]])
[[0.5, -1.0, -4.5], [0.0, 1.0, 6.0], [0.0, 0.0, 1.0]]
>>> inversion([[2,2,-3],[-2,-1,-3],[6,4,4]])
[[4.000000000000008, -10.000000000000021, -4.500000000000009],
[-5.000000000000011, 13.000000000000027, 6.000000000000012],
 [-1.0000000000000018, 2.0000000000000044, 1.0000000000000002]]
"""
```

- On peut aussi utiliser la fonction `inv` de la bibliotheque `numpy.linalg` :

```
"""
>>> import numpy as np
>>> numpy.linalg.inv([[2,2,-3],[-2,-1,-3],[6,4,4]])
array([[  4. , -10. ,  -4.5],
       [ -5. ,  13. ,   6. ],
       [ -1. ,   2. ,   1. ]])
"""
```

- Et on peut vérifier les méthodes numériques avec le module de calcul formel `sympy` :

```
"""
In [49]:  A = sympy.Matrix([[2,2,-3],[-2,-1,-3],[6,4,4]])

In [50]: A**(-1)
Out[50]:
Matrix([[ 4, -10, -9/2],[-5,  13,    6],[-1,   2,    1]])

In [51]: A.det()
Out[51]: 2

"""
```

10 Exercice 13 Inversion de matrice et problèmes avec les flottants

```
A3 = [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]
A4 = [[1, 1./4, 1], [1, 1./3, 2], [0, 1, 12]]
A5 = [[1,1.+10**5,1],[1,1+10**(-5),2],[0,10**5,-1]]
A6 = [[1,10**15,1],[1,10**(-2),2],[0,10**15,-1]]
```

- La matrice `A3` est non inversible alors que les fonctions d'inversion numérique (maison et de bibliothèque) la considerent comme inversible:

  `A3[2] - A3[1] = A3[1] - A3[0] = [3, 3, 3]`

donc `A3[2] = 2*A3[1] - A3[0]` donc les lignes de `A3` sont liées donc A3 pas inversible

ou encore `det(A3) = 1*5*9 + 2*6*7 + 4*8*3 - 3*5*7 - 2*4*9 - 6*8*1 = 0`

```
"""
In [57]: inversion(A3)
Out[57]:
[[-4503599627370498.0, 9007199254740992.0, -4503599627370494.5],
 [9007199254740996.0, -1.8014398509481984e+16, 9007199254740990.0],
 [-4503599627370498.0, 9007199254740992.0, -4503599627370495.5]]

In [58]: A3bis = sympy.Matrix(A3)

In [59]: A3bis.det()
Out[59]: 0

In [60]: A3bis**(-1)
---------------------------------------------------------------------------

ValueError: Matrix det == 0; not invertible.

In [63]: np.linalg.inv(A3)
Out[63]:
array([[  3.15221191e+15,  -6.30442381e+15,   3.15221191e+15],
       [ -6.30442381e+15,   1.26088476e+16,  -6.30442381e+15],
       [  3.15221191e+15,  -6.30442381e+15,   3.15221191e+15]])
"""
```


Explication : à l'étape 2 de la phase de mise sous forme triangulaire la derniere ligne comporte deux infinitésimaux au lieu de zéros :

```
"""
>>> resolution_systeme(A3, [[1],[0], [0]], verbose=True)
Matrice= [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]
Ordonnees = [1, 0, 0]

Etape 1 : pivot = 7.000
Matrice= [[7, 8, 9], [0.0, 0.4285714285714288, 0.8571428571428577],
 [0.0, 0.8571428571428572, 1.7142857142857144]]
Ordonnees = [0, 0.0, 1.0]

Etape 2 : pivot = 0.857
Matrice= [[7, 8, 9], [0.0, 0.8571428571428572, 1.7142857142857144],
[0.0, 5.551115123125783e-17, 1.1102230246251565e-16]]
Ordonnees = [0, 1.0, -0.5000000000000002]

"""
```

- La matrice `A4` est non inversible alors que les fonctions numériques la considerent comme inversible (voir l'exo 10 pour l'explication par erreurs d'approximations).

```
"""
In [65]: inversion(A4)
Out[65]: [[-9007199254740992.0, 9007199254740992.0, -750599937895082.8],
[5.404319552844595e+16, -5.404319552844595e+16, 4503599627370496.0],
[-4503599627370496.0, 4503599627370496.0, -3752999689475 41.25]]

In [66]: np.linalg.inv(A4)
Out[66]: array([[ -9.00719925e+15,   9.00719925e+15,  -7.50599938e+14],
       [  5.40431955e+16,  -5.40431955e+16,   4.50359963e+15],
       [ -4.50359963e+15,   4.50359963e+15,  -3.75299969e+14]])

In [67]: A4bis = sympy.Matrix([[1,sympy.Rational(1,4), 1], [1, sympy.Rational(1,3), 2], [0, 1, 12]])

In [68]: A4bis**(-1)

ValueError: Matrix det == 0; not invertible.

In [69]: A4bis.det()
Out[69]: 0

"""
```

- La matrice `A5` est inversible :

  `det(A5) = -(1+10**(-5)) + 10**5 - 2*10**5 + (1 + 10**5) = -10**(-5)`

```
"""
>>> inversion(A5)
[[20000098346.184444, -20000098345.184444, -20000098344.184444],
 [-99999.9917259636, 99999.9917259636, 99999.9917259636],
```

```
  [-9999999172.59636, 9999999172.59636, 9999999171.59636]]

>>> np.linalg.inv(A5)
array([[  2.00001206e+10,  -2.00001205e+10,  -2.00001205e+10],
[ -1.00000103e+05,   1.00000103e+05,   1.00000103e+05],
[ -1.00000103e+10,   1.00000103e+10,   1.00000103e+10]])

In [74]: A5bis = sympy.Matrix([[1,1+10**5,1],[1,1+Rational(1,10**5),2],[0,10**5,-1]])

In [75]: A5bis.det()
Out[75]: -1/100000

In [76]: A5bis**(-1)
Out[76]:
Matrix([[ 20000100001, -20000100000, -20000099999],[-100000, 100000, 100000],
 [-10000000000,  10000000000,   9999999999]])
"""
```

- La matrice `A6` est inversible alors que les fonctions numériques la considerent comme non inversible. (voir l'exo 10 pour l'explication par erreurs d'approximations)

```
"""
In [85]: inversion(A6)
Traceback (most recent call last):
  .....
ZeroDivisionError: float division by zero

In [86]: np.linalg.inv(A6)
Traceback (most recent call last):
  .........
    raise LinAlgError("Singular matrix")
numpy.linalg.linalg.LinAlgError: Singular matrix

In [87]: A6bis = sympy.Matrix([[1,10**15,1],[1,Rational(1,10**2),2],[0,10**15,-1]])

In [88]: A6bis.det()
Out[88]: -1/100

In [89]: A6bis**(-1)
Out[89]: Matrix([[ 200000000000000001, -200000000000000000, -199999999999999999],
[ -100, 100,100],[-100000000000000000,  100000000000000000,   999999999999999999]])
"""
```

11 Exercice 14 Comparaison entre fonctions maisons et fonctions de bibliothèques sur les matrices de Virginie

```
def virginie1(n):
    """Retourne une matrice de Virginie de dimensions  nxn"""
    assert str(type(n))=="<class 'int'>" and n>=2,"n doit etre un entier >=2"
    V = []
    for i in range(n):
        ligne = []
        for j in range(n):
            if j < i-1 or j > i+1:
                ligne.append(0)
            elif j == i-1 or j == i+1:
                ligne.append(-1)
            else:
                ligne.append(2)
        V.append(ligne)
    return V

def virginie2(n):
    """Retourne une matrice de Virginie de dimensions  nxn
    Voir le fichier cadeau.py pour une explication sur l'expression
    booleenne utilisee"""
    assert str(type(n))=="<class 'int'>" and n>=2,"n doit etre un entier >=2"
    return [[(i == j-1 and -1) or (i == j and 2) or (i == j+1 and -1) or 0
            for j in range(n)] for i in range(n)]

"""
>>> virginie1(4)
[[2, -1, 0, 0], [-1, 2, -1, 0], [0, -1, 2, -1], [0, 0, -1, 2]]
>>> virginie2(4)
[[2, -1, 0, 0], [-1, 2, -1, 0], [0, -1, 2, -1], [0, 0, -1, 2]]
"""

def exo14():
    import time, numpy
    tabvirginie = [(n,virginie1(n)) for  n in [50,100,200,400]]
    print("Temps pour inverser des matrices de Virginie avec la fonction inversion maison : ")
    for v in tabvirginie:
        t0 = time.time()
        inversion(v[1])
        print('Pour la matrice de Virginie de taille %s : %s'%(v[0],time.time()-t0))
    print("Temps pour inverser des matrices de Virginie avec \
          la fonction inversion inv de numpy.linalg : ")
    for v in tabvirginie:
        t0 = time.time()
        numpy.linalg.inv(v[1])
        print('Pour la matrice de Virginie de taille %s : %s'%(v[0],time.time()-t0))
```

Les fonctions de `numpy` sont beaucoup plus rapides (facteur 100) !

```
"""
>>> exo14()
Temps pour inverser des matrices de Virginie avec la fonction inversion maison :
Pour la matrice de Virginie de taille 50 : 0.04155135154724121
Pour la matrice de Virginie de taille 100 : 0.28409647941589355
Pour la matrice de Virginie de taille 200 : 2.1560568809509277
Pour la matrice de Virginie de taille 400 : 18.00588893890381
Temps pour inverser des matrices de Virginie avec la fonction inversion inv de numpy.linalg :
Pour la matrice de Virginie de taille 50 : 0.0004217624664306 6406
Pour la matrice de Virginie de taille 100 : 0.0014603137969970703
```

```
Pour la matrice de Virginie de taille 200 : 0.006672382354736328
Pour la matrice de Virginie de taille 400 : 0.04255509376525879
"""
```